

# Corso di Didattica e Laboratorio di Telecomunicazioni

PAS - Percorsi Abilitanti Speciali



## 4 – MODULAZIONI ANALOGICHE E DIGITALI

Prof. Giovanni Schembra

1

PAS: Telecomunicazioni - Prof. G. Schembra

4 - Modulazioni analogiche e digitali



# INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA MODULAZIONE

2

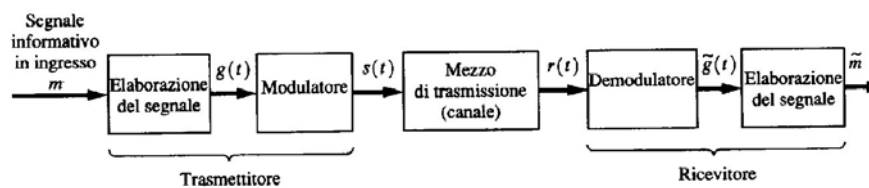
## Definizioni

- **Segnale in banda passante (o passa-banda):**
  - segnale con spettro di ampiezza diverso da zero su di una certa banda nell'intorno di una frequenza  $f = \pm f_c$ , chiamata **frequenza portante**
- **Modulazione:**
  - Processo mediante il quale l'informazione è impressa su di un segnale sinusoidale *portante* con frequenza  $f_c$ , attraverso l'introduzione di una qualche variazione nell'ampiezza, nella fase o su entrambe
- **Segnale modulante:**
  - Segnale originale prima della modulazione
- **Segnale modulato:**
  - Segnale ottenuto dopo la modulazione
- **Segnale portante:**
  - Sinusoide modulata in ampiezza e/o fase dal segnale modulante

 $m(t)$  $s(t)$  $p(t)$ 

3

## Sistema di comunicazione



$$r(t) = (\text{segnale utile}) + (\text{rumore})$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ s(t) \quad n(t) \end{array}$$

4

## Rappresentazione di un segnale reale tramite Fasori

- FASORE:**

Forma polare :  $c = |c| e^{j\theta_c}$   
 Forma rettangolare :  $c = x + jy$

$|c| = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $\theta_c = \tan^{-1}(y/x)$

- Dato un segnale sinusoidale:**

$$w(t) = |c| \cos(\omega_0 t + \theta_c) = \text{Re}\{c e^{j\omega_0 t}\}$$

- FASORE ROTANTE:**

$c e^{j\omega_0 t}$

## Rappresentazione di un segnale mediante l'involuppo complesso

- Teorema:**

- un qualunque **segnale in banda passante** può essere rappresentato come:

$$v(t) = \text{Re}\{g(t) e^{j\omega_c t}\} \quad \text{BANDA BASE} \rightarrow \text{BANDA PASSANTE}$$

dove:

$g(t)$

involuppo complesso di  $v(t)$

$g(t)$  è in banda base

$f_c$

frequenza portante di  $v(t)$

$\omega_c = 2\pi f_c$

- Rappresentazioni equivalenti:**

$v(t) = R(t) \cos[\omega_c t + \theta(t)]$

dove:  $g(t) = x(t) + jy(t) = R(t) e^{j\theta(t)}$  **COMPLESSO**

$v(t) = x(t) \cos(\omega_c t) - y(t) \sin(\omega_c t)$

$x(t) = \text{Re}\{g(t)\} = R(t) \cos(\theta(t))$  **REALE**

$y(t) = \text{Im}\{g(t)\} = R(t) \sin(\theta(t))$  **REALE**

**REALE**  $\theta(t) = \text{Fase}\{g(t)\} = \tan^{-1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$

$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$  **REALE**



## Rappresentazione dei segnali modulati

- **Modulazione:**

- Processo mediante il quale l'informazione è impressa su di un segnale sinusoidale *portante* con frequenza  $f_c$ , attraverso l'introduzione di una qualche variazione nell'ampiezza, nella fase o su entrambe

- **Segnale modulato:**

$$s(t) = \text{Re}\{g(t) e^{j\omega_c t}\}$$

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

$f_c$  : frequenza portante

- L'involuppo complesso  $g(t)$  è una funzione del segnale modulante  $m(t)$ :

$$g(t) = g[m(t)]$$

- Dalla funzione  $g[\ ]$  dipende il tipo di modulazione che si applica (es.: AM, FM, PM)

7



## Esempio: Modulazione in ampiezza (AM)

- **Involuppo complesso di un segnale AM:**

$$g(t) = A_c [1 + m(t)]$$

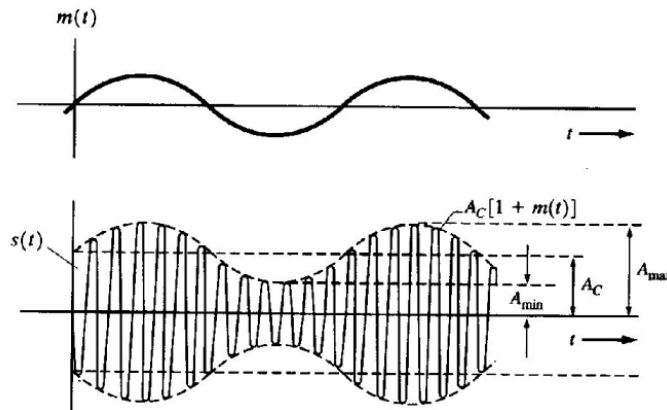
- La costante  $A_c$  determina il livello di potenza
- Il segnale  $m(t)$  è il **segnale modulante** (analogico o digitale)
- Il **segnale modulato AM** è quindi:

$$s(t) = A_c [1 + m(t)] \cos \omega_c t$$

8

## Esempio: Modulazione in ampiezza (AM)

AM:  $g(t) = A_c [1 + m(t)] \rightarrow s(t) = A_c [1 + m(t)] \cos \omega_c t$



## Inviluppo complesso per varie forme di modulazione (modulazioni in QUADRATURA)

Tipo di modulazione	Mappa $g(m)$	Corrispondenti modulazioni in quadratura	
		$x(t)$	$y(t)$
AM	$A_c [1 + m(t)]$	$A_c [1 + m(t)]$	0
DSB-SC	$A_c m(t)$	$A_c m(t)$	0
PM	$A_c e^{jD_p m(t)}$	$A_c \cos [D_p m(t)]$	$A_c \sin [D_p m(t)]$
FM	$A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma}$	$A_c \cos \left[ D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma \right]$	$A_c \sin \left[ D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma \right]$
SSB-AM-SC <sup>b</sup>	$A_c [m(t) \pm j\hat{m}(t)]$	$A_c m(t)$	$\pm A_c \hat{m}(t)$
SSB-PM <sup>b</sup>	$A_c e^{jD_p [m(t) \pm j\hat{m}(t)]}$	$A_c e^{\pm jD_p m(t)} \cos [D_p m(t)]$	$A_c e^{\pm jD_p \hat{m}(t)} \sin [D_p m(t)]$
SSB-FM <sup>b</sup>	$A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^t [m(\sigma) \pm j\hat{m}(\sigma)] d\sigma}$	$A_c e^{\pm jD_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma} \cos \left[ D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma \right]$	$A_c e^{\pm jD_f \int_{-\infty}^t \hat{m}(\sigma) d\sigma} \sin \left[ D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma \right]$
SSB-EV <sup>b</sup>	$A_c e^{j \ln[1+m(t)] \pm j\hat{h}[1+m(t)]}$	$A_c [1 + m(t)] \cos \{ \ln [1 + m(t)] \}$	$\pm A_c [1 + m(t)] \sin \{ \ln [1 + m(t)] \}$
SSB-SQ <sup>b</sup>	$A_c e^{j(1/2) \{ \ln[1+m(t)] \pm j\hat{h}[1+m(t)] \}}$	$A_c \sqrt{1 + m(t)} \cos \{ \frac{1}{2} \ln [1 + m(t)] \}$	$\pm A_c \sqrt{1 + m(t)} \sin \{ \frac{1}{2} \ln [1 + m(t)] \}$
QM	$A_c [m_1(t) + jm_2(t)]$	$A_c m_1(t)$	$A_c m_2(t)$

<sup>a</sup>  $A_c > 0$  è una costante che fissa il livello di potenza del segnale

L, lineare; NL, non lineare;

[ $\hat{\cdot}$ ] indica la trasformata di Hilbert (ovvero la versione ruotata di  $-90^\circ$  di [ $\cdot$ ])

## Involuppo complesso per varie forme di modulazione (modulazioni in AMPIEZZA E FASE)

Corrispondenti modulazioni di ampiezza e fase L, lineare; NL, non lineare;

Tipo di modulazione	$R(t)$	$\theta(t)$	Linearità
→ AM	$A_c  1 + m(t) $	$\begin{cases} 0, & m(t) > -1 \\ 180^\circ, & m(t) < -1 \end{cases}$	L
DSB-SC	$A_c  m(t) $	$\begin{cases} 0, & m(t) > 0 \\ 180^\circ, & m(t) < 0 \end{cases}$	L
→ PM	$A_c$	$D_p m(t)$	NL
→ FM	$A_c$	$D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma$	NL
SSB-AM-SC <sup>b</sup>	$A_c \sqrt{[m(t)]^2 + [\hat{m}(t)]^2}$	$\tan^{-1}[\pm \hat{m}(t)/m(t)]$	L
SSB-PM <sup>b</sup>	$A_c e^{\pm D_p \hat{m}(t)}$	$D_p m(t)$	NL
SSB-FM <sup>b</sup>	$A_c e^{\pm D_f \int_{-\infty}^t \hat{m}(\sigma) d\sigma}$	$D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma$	NL
SSB-EV <sup>b</sup>	$A_c  1 + m(t) $	$\pm \hat{m}[1 + m(t)]$	NL
SSB-SQ <sup>b</sup>	$A_c \sqrt{1 + m(t)}$	$\pm \frac{1}{2} \hat{m}[1 + m(t)]$	NL
QM	$A_c \sqrt{m_1^2(t) + m_2^2(t)}$	$\tan^{-1}[m_2(t)/m_1(t)]$	L

## Spettro dei segnali in banda passante

- Lo spettro di un segnale in banda passante può essere ricavato direttamente da quello del suo involuppo complesso
- Teorema:
  - dato un segnale in banda passante nella forma:

$$v(t) = \text{Re}\{g(t) e^{j\omega_c t}\}$$

$$\begin{array}{l} \text{TF} \\ \text{DSP} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} V(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \\ \mathcal{P}_v(f) = \frac{1}{4} [\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g(-f - f_c)] \end{array} \right.$$



## Potenza dei segnali in banda passante

- **Potenza media totale normalizzata:**

$$P_v = \langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_v(f) df = R_v(0) = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} P_g$$

- **Potenza di picco dell'involuppo (PEP - Peek Envelope Power):**

- potenza media che si otterrebbe se  $|g(t)|$  fosse mantenuto al suo valore di picco
- è equivalente a valutare la potenza media di un segnale sinusoidale a RF, non modulato, con valore di picco pari a:

$$v(t) = R(t) \cos[\omega_c t + \theta(t)] \quad \rightarrow \quad A_p = \max[v(t)]$$

- **Teorema: la potenza normalizzata di picco dell'involuppo è:**

$$P_{PEP} = \frac{1}{2} [\max|g(t)|]^2$$

**Nota:** la  $P_{PEP}$  viene utilizzata per fornire le specifiche di un apparato trasmettitore

13



## MODULAZIONI D'AMPIEZZA

- MODULAZIONE AM DSB
- MODULAZIONE AM DSB-SC
- MODULAZIONI AM SSB (USSB E LSSB)
- MODULAZIONE AM VESTIGIALE

14

## Modulazione di ampiezza (AM - Amplitude Modulation)

- Dato un segnale  $x(t)$ , applichiamo un fattore moltiplicativo  $M$  per portarlo a valori compresi nell'intervallo  $[-1, +1]$ :

$$m(t) = M \cdot x(t) \quad \text{Segnale modulante}$$

- Involuppo complesso di un segnale AM:

$$g(t) = A_c [1 + m(t)]$$

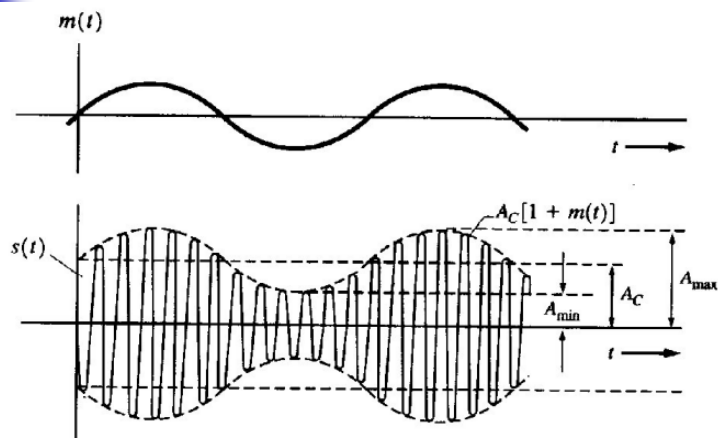
- La costante  $A_c$  determina il livello di potenza
- Il segnale  $m(t)$  è il **segnale modulante** (analogico o digitale)
- Il **segnale modulato AM** è quindi:

$$s(t) = A_c [1 + m(t)] \cos \omega_c t$$

**NOTA:** corrisponde alla componente in fase  $x(t)$  dell'involuppo complesso

15

## Modulazione di ampiezza (AM - Amplitude Modulation)



(b) Segnale AM risultante

16



## Profondità di modulazione

- **Ipotesi:**

$$-1 \leq m(t) \leq 1$$

NOTA:  $\begin{cases} \min\{m(t) = -1\} \\ \max\{m(t) = +1\} \end{cases}$  contemporaneamente solo se il picco positivo e quello negativo del segnale prima della normalizzazione sono simmetrici rispetto all'asse  $x$

- **Se  $m(t)$  ha un valore di picco positivo +1, e di picco negativo -1**

il segnale AM è modulato al 100%

17

## Profondità di modulazione

- **Altrimenti:**

- **Definizioni:**

- **Profondità di modulazione positiva:** % modulazione positiva =  $\frac{A_{\max} - A_c}{A_c} \cdot 100 = \max[m(t)] \cdot 100$

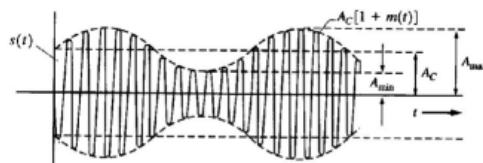
- **Profondità di modulazione negativa:** % modulazione negativa =  $\frac{A_c - A_{\min}}{A_c} \cdot 100 = -\min[m(t)] \cdot 100$

- **Profondità di modulazione totale:** % modulazione =  $\frac{A_{\max} - A_{\min}}{2A_c} \cdot 100 = \frac{\max[m(t)] - \min[m(t)]}{2} \cdot 100$

dove:  $A_{\max}$  : massimo di  $A_c [1 + m(t)]$

$A_{\min}$  : minimo di  $A_c [1 + m(t)]$

$A_c$  : livello di involuipo AM in assenza di modulazione, cioè per  $m(t) = 0$



18

## Spettro bilatero di un segnale modulato in ampiezza

Ricaviamo lo spettro di potenza di un segnale modulato in ampiezza (AM). Dalla Tabella 4-1, l'involuppo complesso di un segnale AM è

$$g(t) = A_c[1 + m(t)]$$

e quindi il suo spettro è dato da

$$G(f) = A_c \delta(f) + A_c M(f) \quad (4-19)$$

Dalla (4-9) si ricava l'espressione del segnale AM

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$$

$$\rightarrow s(t) = A_c[1 + m(t)] \cos \omega_c t$$

$m(t)$  è reale, allora  $M^*(f) = M(-f)$

$\delta(f) = \delta(-f)$  (la funzione delta è pari per definizione).

$$S(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$$

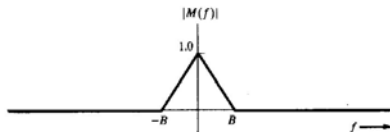
$$S(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \quad (4-20a)$$

19

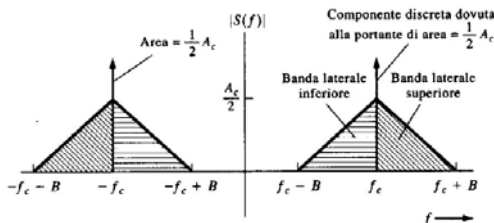
## Spettro bilatero di un segnale modulato in ampiezza

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \quad (4-20a)$$

**Esempio:** Supponiamo che lo spettro di ampiezza del segnale modulante sia una funzione triangolare, come mostrato in Figura 4-2a. Tale spettro potrebbe essere generato ad esempio da una sorgente audio analogica con un forte contenuto di basse frequenze.



Lo spettro del segnale AM risultante dalla (4-20) è mostrato in Figura 4-2b.



20

## Spettro bilatero di un segnale modulato in ampiezza

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \quad (4-20a)$$

Visto che  $G(f - f_c)$  e  $G^*(-f - f_c)$  non si sovrappongono, lo spettro di ampiezza è

$$|S(f)| = \begin{cases} \frac{1}{2} A_c \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c |M(f - f_c)|, & f > 0 \\ \frac{1}{2} A_c \delta(f + f_c) + \frac{1}{2} A_c |M(-f - f_c)|, & f < 0 \end{cases} \quad (4-20b)$$

Il termine 1 in  $g(t) = A_c[1 + m(t)]$  determina la presenza della funzione delta nello spettro in corrispondenza di  $f = \pm f_c$ , dove  $f_c$  è la frequenza portante assegnata.

21

## Potenza media normalizzata del segnale AM

### ■ Potenza media normalizzata:

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 \langle [1 + m(t)]^2 \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 \langle 1 + 2m(t) + m^2(t) \rangle \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 + A_c^2 \langle m(t) \rangle + \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle$$

Se il segnale modulante ha valor medio nullo [ $\langle m(t) \rangle = 0$ ]

$$\longrightarrow \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle$$

potenza della portante

potenza delle bande laterali

**NOTA:** non è un caso generale, ma solo un esempio

$$P_v = \langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_v(f) df = R_v(0) = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle$$

22

## Efficienza di modulazione e potenza di picco

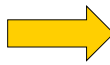
### Definizione: Efficienza di modulazione

- Rapporto percentuale tra la potenza del segnale modulato che trasporta l'informazione e la potenza totale

### In un segnale AM:

- solo la componente di segnale legata alle bande laterali trasporta informazione; quindi l'efficienza di modulazione risulta:

$$\eta_{\text{mod}} = \frac{\langle s_{\text{UTILE}}^2(t) \rangle}{\langle s^2(t) \rangle} = \frac{\frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle}{\frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle}$$



$$\eta_{\text{mod}} = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{1 + \langle m^2(t) \rangle} \cdot 100\%$$

### Nota:

- Il valore massimo di efficienza raggiungibile con una modulazione avente profondità massima pari al 100% è il 50%

### Potenza di picco del segnale AM:

$$P_{\text{PEP}} = \frac{1}{2} [\max |g(t)|]^2$$



$$P_{\text{PEP}} = \frac{A_c^2}{2} \{1 + \max[m(t)]\}^2$$

23

## Modulazione AM a doppia banda laterale con portante soppressa (DSB-SC)

### Double Side Band - Suppressed Carrier (DSB-SC):

- segnale AM senza portante

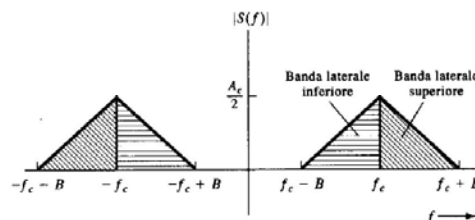
$$g(t) = A_c m(t)$$

$$s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t$$

- Spettro:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

come quello della modulazione AM, ma senza le funzioni delta in  $-f_c$  e  $+f_c$



24

## Modulazione AM a doppia banda laterale con portante soppressa (DSB-SC)

### ■ Rispetto al segnale AM:

$$P_s = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle g^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 P_m \quad \Rightarrow \quad P_s = \frac{1}{2} A_c^2 P_m$$

- Efficienza di modulazione: 100%

non si ha nessuna aliquota di potenza in componenti discrete (nella portante)

- Demodulazione: rivelatore sincrono

più costoso di quello di involuppo

25

## Modulazione AM a banda laterale unica (SSB-AM)

### ■ Definizione:

- **segnale a banda laterale superiore** (USSB - Upper Single Side Band)

$$S(f) = 0 \quad \text{per } |f| < f_c$$

- **segnale a banda laterale inferiore** (LSSB - Lower Single Side Band)

$$S(f) = 0 \quad \text{per } |f| > f_c$$

- Ci sono varie trasformazioni  $g[m]$  per costruire un segnale SSB a partire dal segnale modulante  $m(t)$

- Usata in ambito militare e dai radioamatori nei sistemi HF (*High Frequency*)
- La banda del segnale SSB-AM è metà di quella dei segnali AM e DSB-SC

26

## Modulazione AM a banda laterale unica (SSB-AM)

### ■ Single Side Band - AM (SSB-AM):

- inviluppo complesso:

$$g(t) = A_c [m(t) \pm j \hat{m}(t)]$$

Segno +  $\rightarrow$  USSB

Segno -  $\rightarrow$  LSSB

- segnale modulato in banda base:

$$s(t) = A_c [m(t) \cos \omega_c t \pm \hat{m}(t) \sin \omega_c t]$$

### ■ Trasformata di Hilbert

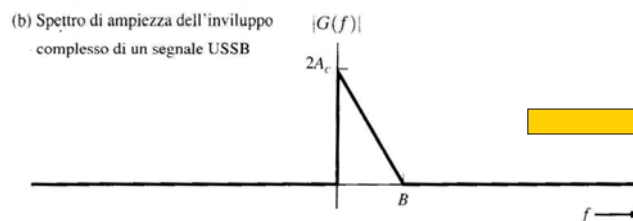
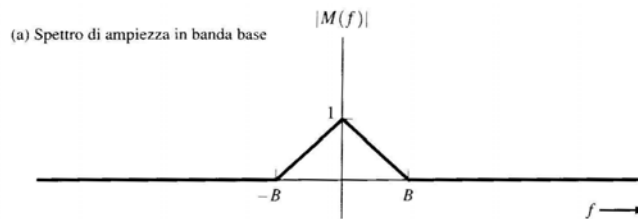
$\hat{m}(t)$  Trasformata di Hilbert di  $m(t)$

Sfasatore puro di  $90^\circ$

$$\hat{m}(t) = m(t) * h(t) \quad \text{dove:} \quad h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad \rightarrow \quad H(f) = \mathfrak{F}\{h(t)\} = \begin{cases} -j & f > 0 \\ j & f < 0 \end{cases}$$

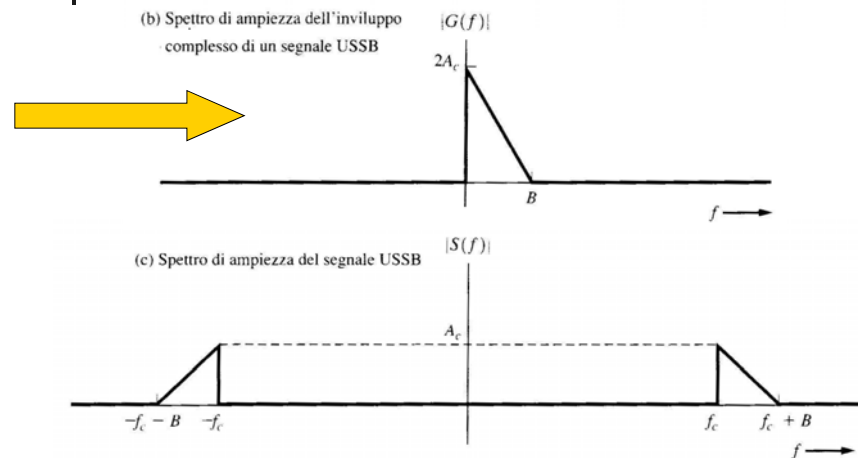
27

## Modulazione SSB-AM: spettro di ampiezza di un segnale USSB



28

## Modulazione SSB-AM: spettro di ampiezza di un segnale USSB



29

## Modulazione AM a banda laterale unica (SSB-AM)

### ■ Potenza media normalizzata

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2 \rangle \quad \text{ma si può dimostrare che: } \langle m^2(t) \rangle = \langle \hat{m}^2(t) \rangle$$

$$\Rightarrow P_s = \langle s^2(t) \rangle = A_c^2 \langle m^2(t) \rangle = A_c^2 P_m$$

- cioè: la potenza del segnale SSB è quella del segnale modulante moltiplicata per il guadagno

### ■ Potenza normalizzata di picco

$$\frac{1}{2} \max \{ |g(t)|^2 \} = \frac{1}{2} A_c^2 \max \{ m^2(t) + \hat{m}^2(t) \} \Rightarrow P_{PEP} = A_c^2$$

30

## Modulazione AM a banda laterale unica (SSB-AM)

### ■ Vantaggi:

- Il segnale SSB-AM necessita di una banda dimezzata rispetto a quella di un segnale AM o DSB-SC
- Fornisce un rapporto segnale-rumore all'uscita del ricevitore superiore a quello di un sistema AM, e uguale a quello del DSB-SC

### ■ Svantaggi:

- Il modulatore e il demodulatore sono di più difficile realizzazione rispetto al DSB SC e, soprattutto, dell'AM

31

## Modulazione a banda laterale vestigiale (o residua) - VSB

### ■ In certe applicazioni (es.: radiodiffusione televisiva analogica)

- la modulazione DSB fa un uso poco efficiente della banda
- la modulazione SSB è più difficile da realizzare



compromesso tra la DSB e la SSB

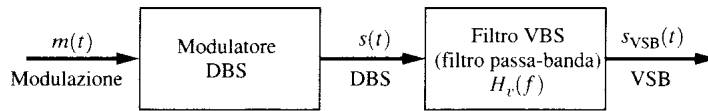
### ■ Banda laterale vestigiale (o residua)

- ottenuta sopprimendo *parzialmente* una banda laterale di un segnale DSB-SC oppure AM
- la banda laterale inferiore di un segnale DSB viene attenuata da un filtro passa-banda (filtro vestigiale) con risposta in frequenza asimmetrica rispetto alla frequenza  $\pm f_c$

32



## Modulazione a banda laterale vestigiale (o residua) - VSB



- **Segnale VSB:**

$$s_{VSB}(t) = s(t) * h_v(t)$$

risposta impulsiva del filtro vestigiale

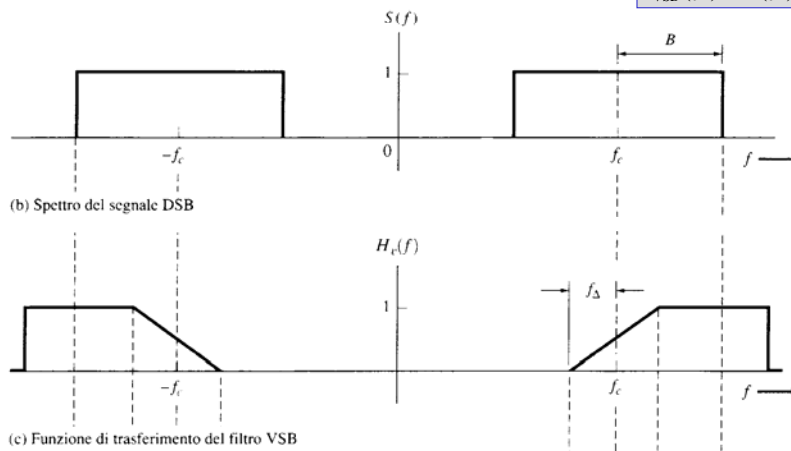
segnale (AM oppure DSB-SC)

- **Spettro del segnale VSB:**

$$S_{VSB}(f) = S(f)H_v(f)$$

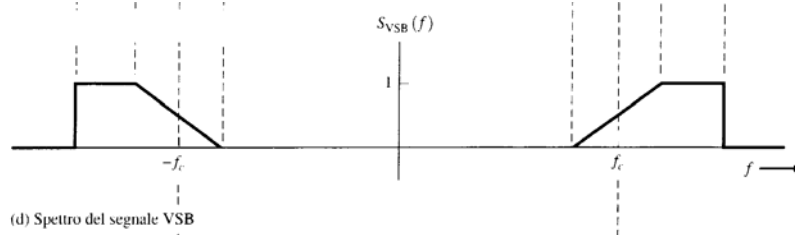
## Spettri dei segnali nella modulazione vestigiale

$$S_{VSB}(f) = S(f)H_v(f)$$



## Spettri dei segnali nella modulazione vestigiale

$$S_{VSB}(f) = S(f)H_v(f)$$

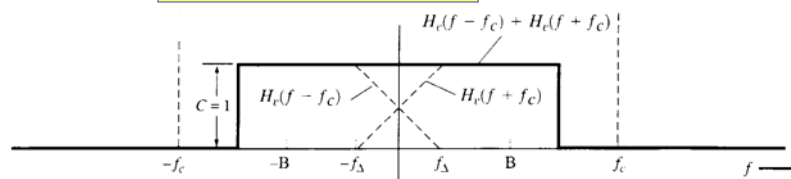


35

## Demodulazione di un segnale vestigiale

- **Il demodulatore può essere:**
  - Sincrono se il segnale d'ingresso è DSB-SC
  - Rivelatore d'involuppo, se è presente la portante con un livello sufficiente
- **Vincolo per non avere distorsione sul segnale demodulato:**
  - Il filtro vestigiale deve essere tale che:

$$H_v(f - f_c) + H_v(f + f_c) = C \quad \forall |f| \leq B$$



36



## MODULAZIONI D'ANGOLO

- MODULAZIONE DI FASE
- MODULAZIONE DI FREQUENZA

37



## Modulazione d'angolo

### ■ Modulazione d'angolo (o angolare)

- Involuppo complesso:

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}$$

- Il modulo dell'involuppo complesso è costante  $R(t) = |g(t)| = A_c$
- La fase è funzione del segnale modulante  $m(t)$
- Complessivamente  $g(t)$  è una funzione non lineare del segnale modulante  $m(t)$
- Il segnale modulato in angolo risulta:

$$s(t) = \operatorname{Re}\{g(t) e^{j\omega_c t}\} \longrightarrow s(t) = A_c [\cos(\omega_c t + \theta(t))]$$

- La modulazione di fase e la modulazione di frequenza sono due casi particolari di modulazione angolare

38

## Modulazione di fase e di frequenza

### ■ Modulazione di fase (PM - Phase Modulation)

- la fase istantanea dell'involucro complesso è proporzionale al segnale modulante:

$$\theta(t) = D_p m(t)$$

- la costante  $D_p$ :
  - sensibilità di fase del modulatore (oppure costante di deviazione di fase)
  - misurata rad/V, se il segnale  $s(t)$  è una tensione

### ■ Modulazione di frequenza (FM - Frequency Modulation)

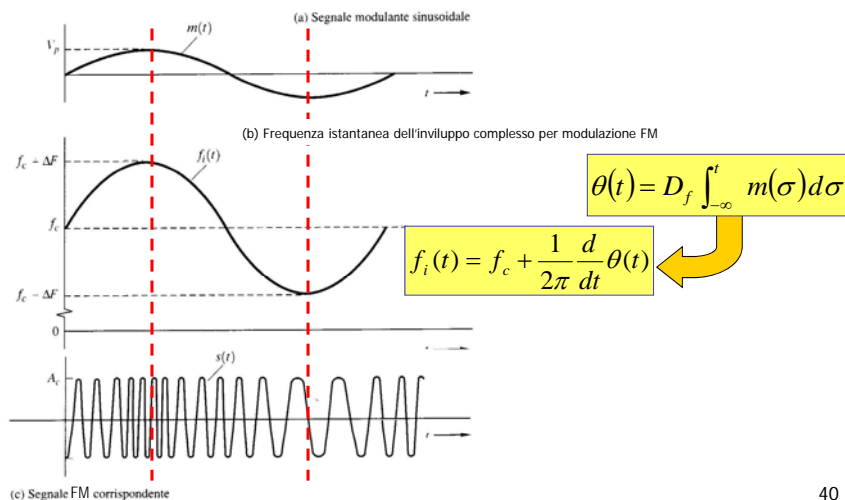
- la fase istantanea dell'involucro complesso è proporzionale all'integrale del segnale modulante:

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma$$

- la costante  $D_f$ :
  - sensibilità di frequenza (oppure costante di deviazione di frequenza)
  - misurata (rad/s)/V, se il segnale  $s(t)$  è una tensione

39

## Segnale FM di un segnale modulante sinusoidale



40

## Analisi della modulazione di frequenza

Se aumenta l'ampiezza del segnale modulante,  $V_p$

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p$$

Aumento della deviazione,  $\Delta F$

Aumento della banda del segnale FM

La potenza media rimane però costante, e pari a

$$P = \frac{A_c^2}{2}$$

Aumentando  $V_p$ , le componenti spettrali vicino alla frequenza portante decrescono in ampiezza

Cominciano a comparire frequenze sempre più lontane

Nota: comportamento differente da quello della modulazione AM, dove il segnale modulante influenza la potenza del segnale modulato, ma non la banda

41

## Indici di modulazione angolare

- Definizione:

- Indice di modulazione di fase:

$$\beta_p = \Delta\theta$$

- Indice di modulazione di frequenza:

$$\beta_f = \frac{\Delta F}{B}$$

dove:

$B$ : banda del segnale modulante

$\Delta F$ : deviazione di frequenza di picco

- Nota:

- Se il segnale modulante è sinusoidale di frequenza  $f_m$

$$\Rightarrow B = f_m$$

- Dimostreremo che modulazioni PM ed FM con segnale modulante sinusoidale con stessa deviazione di frequenza di picco

$$\Rightarrow \beta_f = \beta_p$$

42

## Spettro dei segnali modulati d'angolo

- **Spettro:**

$$S(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \quad \text{dove: } G(f) = \mathfrak{T}\{g(t)\} = \mathfrak{T}\{A_c e^{j\theta(t)}\}$$

- Per i segnali modulati d'angolo,  $g(t)$  è una funzione non lineare di  $m(t)$



- Non esiste una formula semplice e generale che mette in relazione  $G(f)$  e  $M(f)$ , come per l'AM
- La teoria dipende dal particolare tipo di segnale
- Non vale il principio di sovrapposizione: lo spettro FM relativo alla somma di due segnali NON È uguale alla somma dei due spettri

43

## Regola di Carson per il calcolo della banda

- **IN GENERALE, per tutte le modulazioni d'angolo:**

- La banda di un segnale modulato d'angolo dipende da  $\beta$  e da  $f_m$ .
- Regola di Carson:
  - Il 98% della potenza totale è contenuta nella banda:

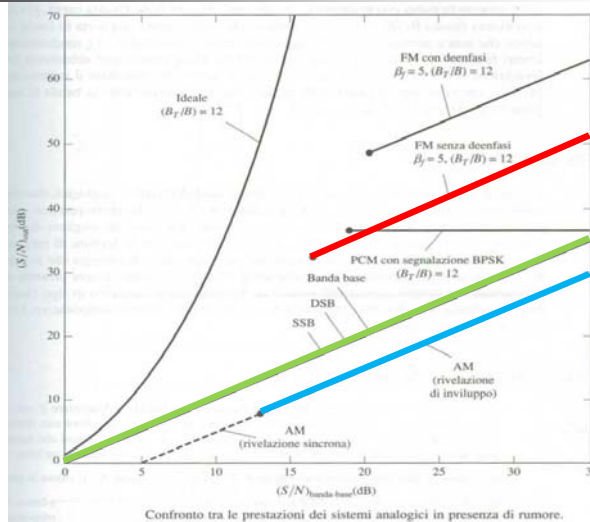
$$B_T = 2(\beta + 1)B$$

dove:

- $\beta$ : indice di modulazione di fase o quello di frequenza
- $B$ : banda del segnale modulante
- Fornisce un'indicazione di massima per valutare la banda di un segnale PM o FM (con modulante anche non sinusoidale, purché a banda limitata)

44

## Confronto tra le prestazioni dei sistemi analogici in presenza di rumore



NOTA:  
 $B_f/B=12$  nell'FM commerciale

# MODULAZIONI DIGITALI



## Struttura della lezione

---

- **Modulazioni digitali binarie (→)**
  - Modulazione ASK
  - Modulazione BPSK
  - Modulazione FSK
- **Modulazioni digitali multilivello (→)**
  - Modulazione MPSK
  - Modulazione QPSK
  - Modulazione QAM
- **BER per le modulazioni digitali (→)**

47



## MODULAZIONI DIGITALI BINARIE

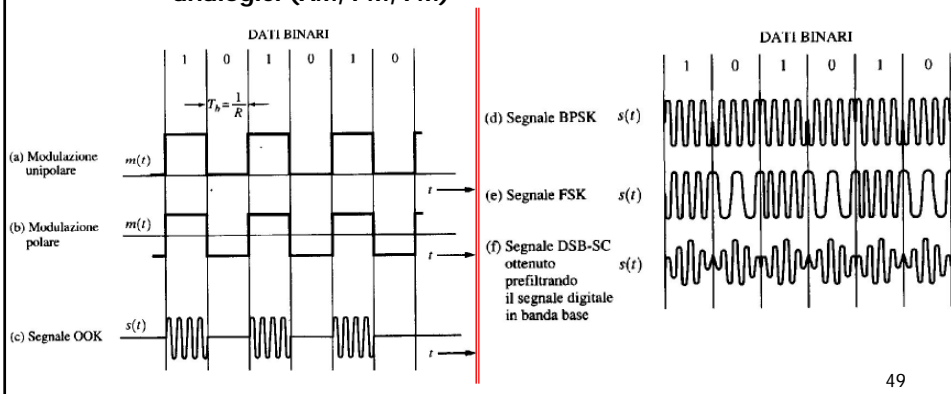
- MODULAZIONE ASK O OOK
- MODULAZIONE BPSK
- MODULAZIONI FSK

48



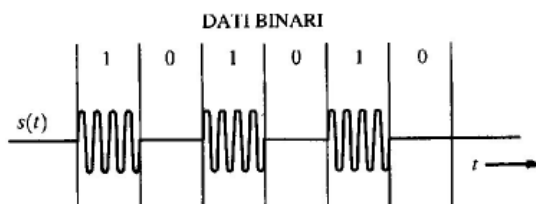
## Modulazioni digitali binarie

- Il segnale  $m(t)$  sia un segnale digitale in banda base, rappresentato con un codice di linea
- Possiamo utilizzare una delle modulazioni descritte per segnali analogici (AM, PM, FM)



49

## Modulazione OOK o ASK



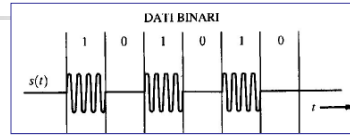
- **Modulazione OOK (on-off keying), o ASK (amplitude shift keying):**
  - è una modulazione on-off dell'ampiezza di una portante sinusoidale
  - è di fatto una modulazione DSB-SC con segnale modulante binario unipolare
  - è universalmente impiegata nei sistemi di trasmissione su fibra ottica

50

# Modulazione OOK o ASK

■ Segnale

**OOK:**  $s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t$



dove  $m(t)$  è il segnale digitale in banda base

**Involuppo complesso:**  $g(t) = A_c m(t)$

**DSP dell'involuppo complesso:**

ESEMPIO: formattazione dell'impulso a IMPULSO RETTANGOLARE

$$\mathcal{P}_{\text{unipolare NRZ}}(f) = \frac{A^2}{4} [T_b \text{sinc}^2(f T_b) + \delta(f)]$$

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{A_c^2}{2} [\delta(f) + T_b \text{sinc}^2(f T_b)]$$

$A = \sqrt{2}$  condizione di normalizzazione di un segnale NRZ unipolare

# Modulazione OOK o ASK

ESEMPIO: formattazione dell'impulso a IMPULSO RETTANGOLARE

■ DSP per il segnale

$s(t)$ :

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{A_c^2}{2} [\delta(f) + T_b \text{sinc}^2(f T_b)]$$

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{1}{4} [\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g(-f - f_c)]$$

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{A_c^2}{8} [\delta(f - f_c) + T_b \text{sinc}^2((f - f_c) T_b)] + \frac{A_c^2}{8} [\delta(f + f_c) + T_b \text{sinc}^2((f + f_c) T_b)]$$

$R = \frac{1}{T_b}$  Velocità di segnalazione

**Banda di trasmissione**

$B_T = 2B$  banda di  $m(t)$

$B = B_{\text{unipolare NRZ}} = R$

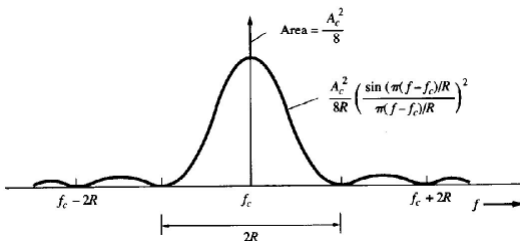
**Banda nullo-nullo**

**Banda assoluta**

$B_T = 2R$

$B_T = \infty$

NOTA: come per l'AM



## Modulazione OOK o ASK

### ■ Come contenere la banda di trasmissione:

- uso di un filtro a coseno rialzato
- in questo caso la **banda assoluta del segnale binario in banda base**,  $B$ , dipende dalla velocità di segnalazione,

$$D = \frac{2B}{1+r}$$



$$B = \frac{1+r}{2} R$$

$$R = R_b$$

$r$ : fattore di roll-off del filtro

- **Banda di trasmissione assoluta del segnale OOK con sagomatura a coseno rialzato:**

$$B_T = (1+r)R$$

53

## Modulazione BPSK

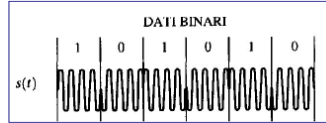


### ■ Modulazione BPSK (binary **phase** shift keying)

- consiste nell'introdurre uno sfasamento di  $0^\circ$  o di  $180^\circ$  nella fase della portante in base al valore di un segnale modulante binario polare (Valori PAM: +1 e -1)
- di fatto è una **modulazione PM** digitale
- DIMOSTREREMO che è anche equivalente a una DSB-SC con segnale binario bipolare, dato che sfasare la portante di  $180^\circ$  significa semplicemente cambiarne il segno durante tutto un intervallo di segnalazione

54

## Modulazione BPSK



cos di una somma

- Involuppo complesso:

$$g(t) = A_c e^{jD_p m(t)}$$

- Segnale BPSK:

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + D_p m(t)]$$

dove  $m(t)$  è il segnale digitale in banda base

- Il segnale modulante binario PAM  $m(t)$  assume SOLO i valori +1 e -1 (**segnalazione polare**)
- Dimostriamo che la modulazione BPSK polare è un caso particolare di modulazione di ampiezza (AM):

$$s(t) = A_c \cos[D_p m(t)] \cos \omega_c t - A_c \sin[D_p m(t)] \sin \omega_c t$$

$m(t) \in \{-1, +1\}$   
 $\cos(x)$  funzione pari  
 $\sin(x)$  funzione dispari

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos D_p}_{\text{portante}} \cos \omega_c t - \underbrace{A_c \sin D_p m(t)}_{\text{termine di informazione}} \sin \omega_c t$$

## Indice di modulazione

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos D_p}_{\text{portante}} \cos \omega_c t - \underbrace{A_c \sin D_p m(t)}_{\text{termine di informazione}} \sin \omega_c t$$

- **Indice di modulazione, usato per le modulazioni digitali**  $h = \frac{2 \cdot \Delta\theta}{\pi}$  **angolo**: deviazione picco-picco

$2 \cdot \Delta\theta$  deviazione picco-picco in radianti, che si ha nell'intervallo di trasmissione di un simbolo,  $T_s$

- Il livello della portante dipende dal valore della deviazione di picco  $\Delta\theta = D_p V_p = D_p$

$$m(t) = \pm 1 \Rightarrow V_p = +1$$

- Se tale valore è piccolo
  - il termine relativo alla portante ha ampiezza elevata
  - la potenza relativa alla componente informativa è bassa



## Indice di modulazione

$$h = \frac{2 \cdot \Delta\theta}{\pi}$$

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos D_p}_{\text{portante}} \cos \omega_c t - \underbrace{A_c \sin D_p m(t)}_{\text{termine di informazione}} \sin \omega_c t$$

- Per ottenere elevata efficienza, è necessario massimizzare la potenza del termine relativo all'informazione

Scegliamo:  $\Delta\theta = D_p = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \rightarrow h = 1$

$$h = 1$$

Forma usuale per esprimere un segnale BPSK

$$s(t) = -A_c m(t) \sin \omega_c t$$

**NOTA:** con tale scelta di  $D_p$ , la modulazione BPSK è equivalente ad una modulazione di ampiezza DSB-SC con segnale modulante bipolare

57



## Modulazione BPSK

$$s(t) = -A_c m(t) \sin \omega_c t$$

- Involuppo complesso del segnale BPSK:

$$g(t) = jA_c m(t)$$

- DSP del segnale BPSK:

$$\varphi_{\text{polare NRZ}}(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2(f T_b)$$

$$m(t) \in \{-1, +1\}$$

$$P = \frac{A_c^2}{2}$$

Condizione di normalizzazione di un segnale NRZ polare:  $A=1$

$$\varphi_g(f) = A_c^2 T_b \text{sinc}^2(f T_b)$$

ESEMPIO:  
formattazione  
dell'impulso a  
IMPULSO  
RETTANGOLARE

$$\varphi_s(f) = \frac{1}{4} [\varphi_g(f - f_c) + \varphi_g(-f - f_c)]$$

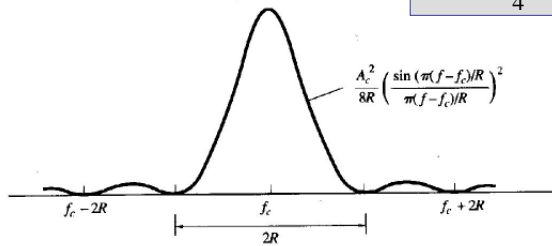
$$\varphi_s(f) = \frac{A_c^2 T_b}{4} [\text{sinc}^2((f - f_c) T_b) + \text{sinc}^2((f + f_c) T_b)]$$

58

## Modulazione BPSK

ESEMPIO: formattazione dell'impulso a IMPULSO RETTANGOLARE

$$\Phi_v(f) = \frac{A_c^2 T_b}{4} [\text{sinc}^2((f - f_c)T_b) + \text{sinc}^2((f + f_c)T_b)]$$



$$R = \frac{1}{T_b} \text{ Velocità di segnalazione}$$

$$B = B_{\text{polareNRZ}} = R$$

Banda al nullo-nullo

$$B_T = 2R$$

Banda assoluta

$$B_T = \infty$$

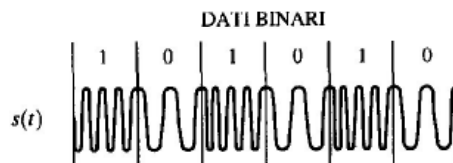
Banda di trasmissione

$$B_T = 2B \leftarrow \text{banda di } m(t)$$

NOTA: come per il segnale OOK

59

## Modulazione FSK



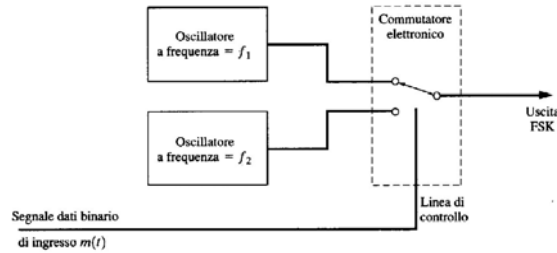
### ■ Modulazione FSK (frequency shift keying)

- consiste nel modificare la frequenza della portante sulla base del segnale dati binario, utilizzando due diversi valori in corrispondenza dei simboli 0 e 1
- è del tutto equivalente ad una modulazione FM

60

## Modulazione FSK a fase discontinua

- Si ottiene commutando l'uscita del trasmettitore tra due oscillatori con frequenze div



- Il segnale modulato presenta delle discontinuità di fase agli istanti di commutazione
- È una modulazione obsoleta

61

## Modulazione FSK a fase discontinua

- Si ottiene commutando l'uscita del trasmettitore tra due oscillatori con frequenze diverse

■ Il segnale modulato è:

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] = \begin{cases} A_c \cos[\omega_1 t + \theta_1] & \text{per } t \text{ nell'intervallo di tempo in cui} \\ & \text{è trasmesso il simbolo binario 1} \\ A_c \cos[\omega_2 t + \theta_2] & \text{per } t \text{ nell'intervallo di tempo in cui} \\ & \text{è trasmesso il simbolo binario 0} \end{cases}$$

$f_1$ : frequenza di mark (simbolo binario 1)

$f_2$ : frequenza di space (simbolo binario 0)     $\theta_1$  e  $\theta_2$ : fasi iniziali dei due oscillatori

**Fase istantanea (discontinua):**

$$\theta(t) = \begin{cases} \omega_1 t + \theta_1 - \omega_c t & \text{per } t \text{ nell'intervallo di tempo in cui} \\ & \text{è trasmesso il simbolo binario 1} \\ \omega_2 t + \theta_2 - \omega_c t & \text{per } t \text{ nell'intervallo di tempo in cui} \\ & \text{è trasmesso il simbolo binario 0} \end{cases}$$

62

## Modulazione FSK a fase continua

- CP-FSK (Continuous Phase FSK)
- Si ottiene inviando il segnale dati all'ingresso di un modulatore di frequenza
- Il segnale modulato è:

$$s(t) = A_c \cos \left[ \omega_c t + D_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right]$$

oppure:

$$s(t) = \operatorname{Re} \{ g(t) e^{j\theta(t)} \}$$

dove:

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}$$

involuppo complesso

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$

fase istantanea

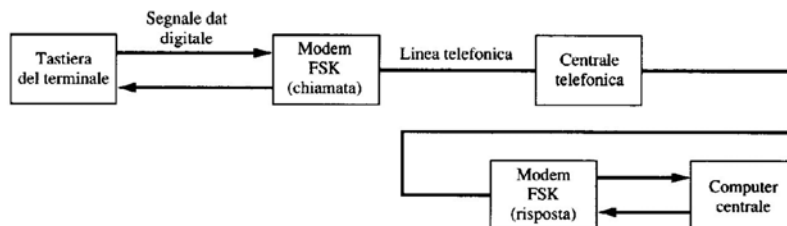
- In questo caso, anche se  $m(t)$  è discontinuo agli istanti di commutazione, la fase istantanea è continua, dato che è proporzionale all'integrale di  $m(t)$

63

## Collegamento modem-modem

I personal computer (PC) sono perlopiù collegati alla rete Internet via modem su linea telefonica. Quest'ultima può essere schematizzata come un canale passa-banda nell'intervallo 300-3300 Hz.

I segnali dati in banda base (come quello bipolare) non sono adatti per la trasmissione su questa banda; ecco perché nei modem si effettua di solito una modulazione per produrre un segnale passa-banda che si adatti al particolare canale utilizzato. La connessione dal PC al server di rete si realizza collegando due modem (ognuno formato da un modulatore e da un demodulatore) alle due estremità della linea (Fig. 5-24).



64





## Collegamento modem-modem

I modem ITU V.34 a 28.8 kbit/s e V.34bis a 33.6 kbit/s fanno uso della modulazione QAM, mentre i modem V.90 a 56 kbit/s utilizzano tecniche PCM (Par. 3-3). Ma è la tecnica FSK quella a essere stata utilizzata per prima, e continua a esserlo nella segnalazione telefonica relativa all' identificatore di chiamata e anche in molte applicazioni wireless.

Il modem ITU V.21 (1981) a 300 bit/s usava la modulazione FSK

Ogni modem contiene una sezione di trasmissione e una di ricezione in modo che il computer può "trasmettere" e "ricevere" contemporaneamente. Per il modem ITU V.21 si hanno due bande (una attorno a 1 kHz e l'altra attorno a 2 kHz) per le funzioni simultanee di trasmissione e di ricezione. Questo approccio è chiamato *full-duplex*, mentre nella modalità *half-duplex* si può solo alternativamente o trasmettere o ricevere, e in *simplex* si può solo trasmettere o solo ricevere unidirezionalmente.

65



## Collegamento modem-modem

Le cosiddette frequenze *mark* e *space* per le due bande sono indicate in Tabella 5-3, dove si può verificare che la deviazione picco-picco è  $2\Delta F = 200$  Hz.

	Modem che origina la chiamata (Hz)	Modem chiamato (Hz)
Frequenze di trasmissione:		
Mark = simbolo binario 1	$f_1 = 1270$	$f_1 = 2225$
Space = simbolo binario 0	$f_2 = 1070$	$f_2 = 2025$
frequenze di ricezione		
Mark = simbolo binario 1	$f_1 = 2225$	$f_1 = 1270$
Space = simbolo binario 0	$f_2 = 2025$	$f_2 = 1070$

66

## Banda di trasmissione per i segnali FSK

- La banda è data approssimativamente da:

$$B_T = 2(\beta + 1)B$$

$$\beta = \Delta F \frac{1}{B}$$

$$\Rightarrow B_T = 2(\Delta F + B)$$

dove  $B$  è la banda del segnale modulante

Regola di Carson

Dato che nell'esempio precedente la banda al primo nullo del segnale è:

$$B = R \Rightarrow B_T = 2(\Delta F + R)$$

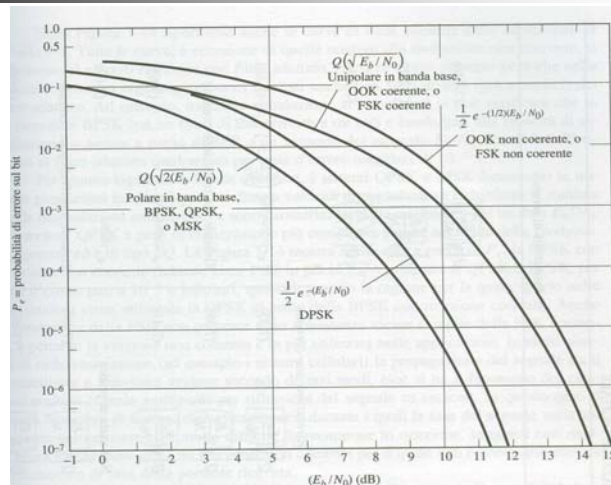
Banda di tx nullo-nullo

Se si usa una sagomatura degli impulsi a coseno rialzato:

$$B = \frac{1+r}{2} R \Rightarrow B_T = 2\Delta F + (1+r)R$$

Banda di tx assoluta

## Confronto della BER per i diversi schemi di segnalazione digitale



Confronto fra le probabilità di errore sul bit per diversi schemi di segnalazione digitale.



## MODULAZIONI DIGITALI MULTILIVELLO

- MODULAZIONE MPSK
- MODULAZIONE QPSK
- MODULAZIONI QAM

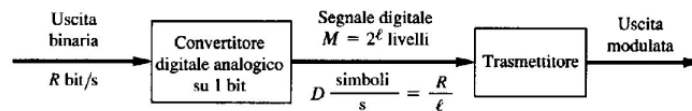
69



## Modulazioni digitali multilivello

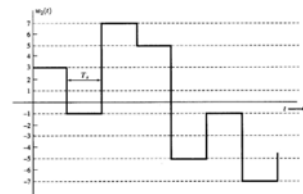
### ■ Modulazione multilivello:

- modulazione di un segnale digitale con un numero di simboli maggiore di due
- il segnale multilivello può essere generato da un flusso di dati binario con un convertitore digitale-analogico (DAC)



Es.:  $M = 2^\ell = 8$

000	+7
001	+5
010	+3
011	+1
100	-1
101	-3
110	-5
111	-7



Velocità di simbolo

$$D = \frac{R}{\ell}$$

70

## Modulazione MPSK ( $M$ -ary Phase Shift Modulation)

- Realizzata tramite un modulatore di tipo PM applicato ad un segnale modulante PAM digitale a  $M$  livelli

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t)$$

- L'involuppo complesso  $\theta(t) = D_p m(t)$

- Segnale modulante:  $m(t) \in \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$  Volt

$$\theta(t) \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M\}$$

$\theta_i$ : fasi del segnale MPSK

- I valori possibili di  $x(t)$  sono:

$$x_i = A_c \cos \theta_i$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, M\}$$

- I valori possibili di  $y(t)$  sono:

$$y_i = A_c \sin \theta_i$$

71

## Modulazione MPSK ( $M$ -ary Phase Shift Modulation)

Segnale modulato

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t)$$

$$x_i = A_c \cos \theta_i$$

$$y_i = A_c \sin \theta_i$$

$$s(t) = \text{Re}\{g(t) \cdot e^{j\omega_c t}\}$$

$$s(t) = x(t) \cos \omega_c t - y(t) \sin \omega_c t$$

- Il segnale MPSK può essere generato utilizzando due portanti:
  - portante in fase, modulata dalla parte reale dell'involuppo complesso
  - portante in quadratura, modulata dalla parte immaginaria dell'involuppo complesso

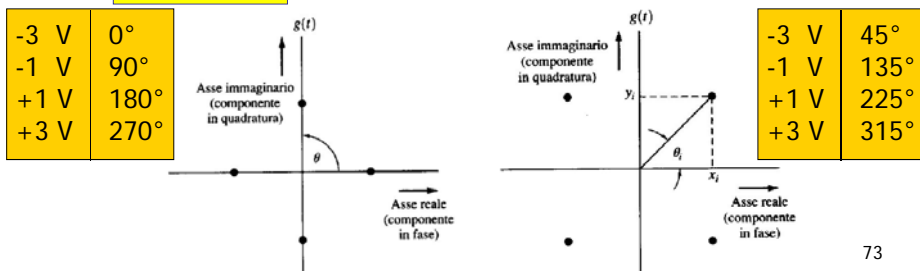
72

## Modulazione QPSK (Quadrature Phase Shift Modulation)

- Caso particolare della modulazione MPSK con  $M=4$  livelli
- Realizzata tramite un trasmettitore di tipo PM con un segnale modulante a  $M=4$  livelli

Rappresentazione dell'involucro complesso

$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}$  sul piano complesso con una **costellazione** di  $M=4$  punti



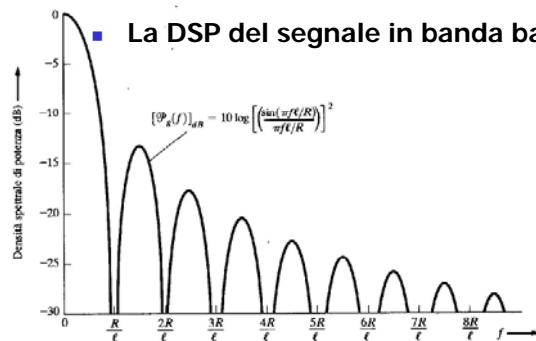
73

## DSP di un segnale QPSK

**ESEMPIO: formattazione dell'impulso a IMPULSO RETTANGOLARE**

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t)$$

- L'involucro del segnale QPSK con impulsi rettangolari ha modulo costante,  $A_c$
- Non è presente alcuna modulazione AM



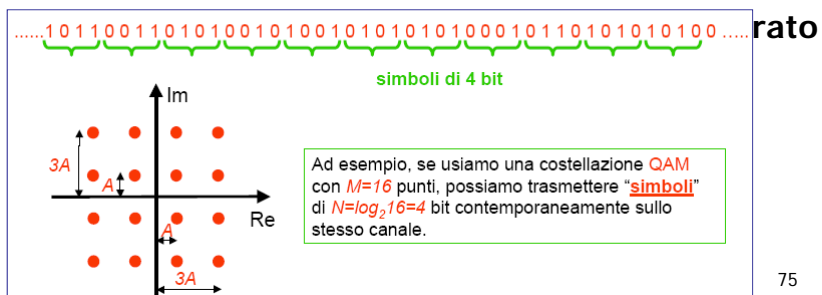
- La DSP del segnale in banda base è del tipo:  $\text{sinc}^2(f \ell T_b)$

- Presenta lobi laterali non trascurabili
- Soluzione:
  - Filtro sagomatore d'impulso a coseno rialzato

74

## Modulazione QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

- Utilizza portante in fase e portante in quadratura come la modulazione MPSK
- A differenza della MPSK i punti della costellazione non sono vincolati ad appartenere ad una circonferenza di raggio  $A_c$



75

## Modulazione QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

- Rappresentazione di un segnale QAM:

$$g(t) = x(t) + jy(t) = R(t)e^{j\theta(t)}$$

Involuppo complesso

Modulo variabile nel tempo

e quindi:  $s(t) = x(t)\cos \omega_c t - y(t)\sin \omega_c t$

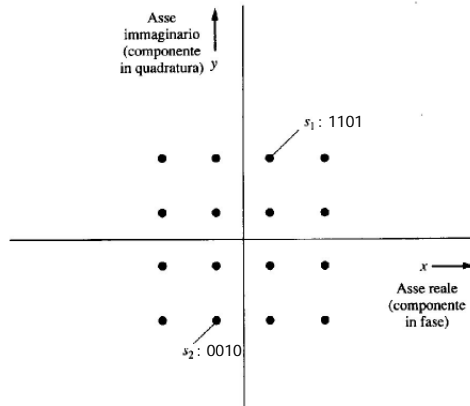
Segnale modulato

le componenti in fase e quadratura  $x(t)$  e  $y(t)$  sono entrambe segnali digitali multilivello

76

## Esempio di costellazione 16-QAM (QAM a 16 punti nella costellazione)

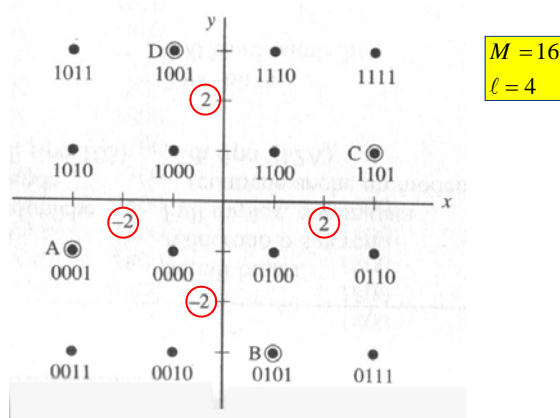
Rappresentazione dell'involucro complesso  $g(t)$



- Costellazione ottenuta con due segnali a 4 livelli in fase e 4 in quadratura

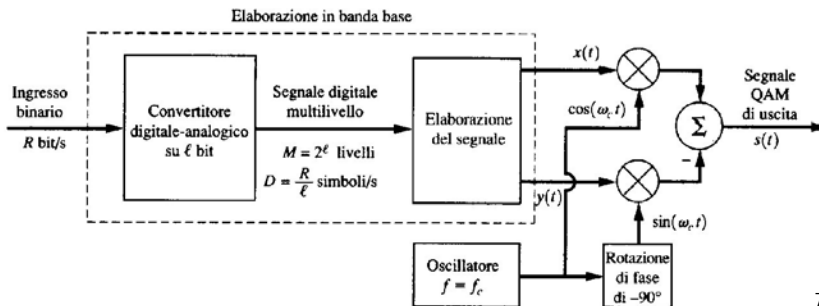
$M = 16$   
 $\ell = 4$

## Esempio di costellazione 16-QAM (QAM a 16 livelli)



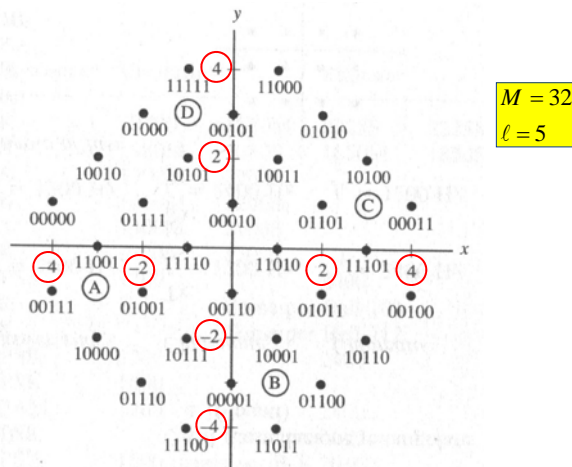
## Esempio di costellazione 16-QAM (QAM a 16 livelli)

- **Applicazioni:**
  - Modem V.22 bis a 2400 bit/s
  - Sistema di radiodiffusione digitale DVB
  - Linea ADSL
- **Il segnale 16-QAM può essere generato mediante due convertitori A/D a due bit e un modulatore I/Q**



79

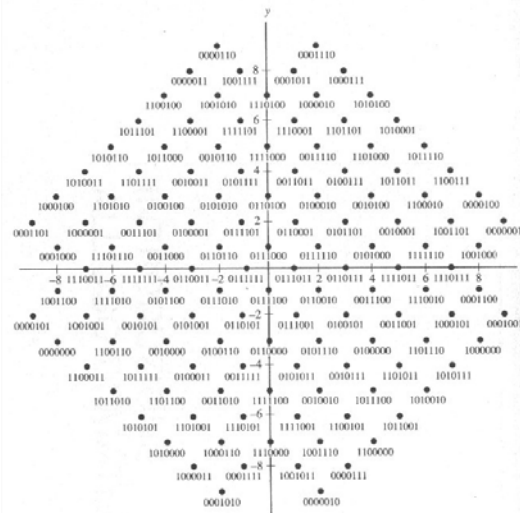
## Esempio: 32 QAM



80



## Esempio: 128 QAM



81

## DSP per le modulazioni MPSK e QAM

- L'involuppo complesso per il segnale MPSK o QAM:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_s)$$

dove  $a_n$  è una variabile aleatoria che rappresenta il simbolo multilivello per l' $n$ -esimo intervallo di segnalazione (impulso)

$f(t)$  è l'impulso di modulazione:  $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_s}\right)$

$D = \frac{1}{T_s}$  velocità di segnalazione

- La TF dell'impulso è:

$$F(f) = T_s \operatorname{sinc}(f T_s) = \ell T_b \operatorname{sinc}(\ell f T_b)$$

dove:  $T_s = \ell T_b$  in quanto un simbolo rappresenta un bit

82

ESEMPIO: formattazione dell'impulso a IMPULSO RETTANGOLARE



## DSP per le modulazioni MPSK e QAM

- Per simboli simmetrici rispetto al livello 0, ed equiprobabili, si può dimostrare che la DSP dell'involuppo complesso del segnale MPSK o QAM è:

$$\mathcal{P}_g(f) = C \ell T_b \text{sinc}^2(f \ell T_b)$$

dove:

$$M = 2^\ell \quad \text{numero di punti della costellazione}$$

$$R = \frac{1}{T_b} \quad \text{velocità di informazione}$$

Si può provare che, per una potenza trasmessa totale pari a  $P$  si ha:  $C = 2P$

### DSP del segnale modulato MPSK e QAM:

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{1}{4} [\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g(-f - f_c)]$$

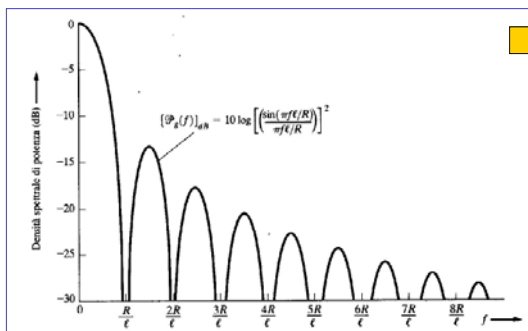
ESEMPIO: formattazione dell'impulso a IMPULSO RETTANGOLARE



## DSP per le modulazioni MPSK e QAM

- DSP dell'involuppo delle MPSK e QAM

$$\mathcal{P}_g(f) = K \text{sinc}^2(f \ell T_b)$$



Banda nullo-nullo di  $s(t)$

$$B_T = \frac{2R}{\ell}$$

EFFICIENZA SPETTRALE

$$\eta = \frac{R}{B_T} \rightarrow \eta = \frac{\ell}{2} \quad \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

Nella 16QAM ( $M=16$ )  $\eta = 2$

ESEMPIO: formattazione dell'impulso a IMPULSO RETTANGOLARE

## DSP per le modulazioni MPSK e QAM

■ **NOTA:**

- per  $\ell=1$  si ritrova la DSP del segnale BPSK:

$$\mathcal{P}_g(f) = K \operatorname{sinc}^2(f \ell T_b)$$

$$K = C \ell T_b$$

$$C = 2P = A_c^2$$



**BPSK**

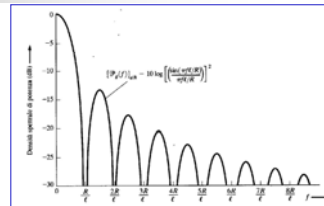
$$\mathcal{P}_g(f) = A_c^2 T_b \operatorname{sinc}^2(f T_b)$$

## Sagomatura con impulsi a coseno rialzato: riduzione della banda

■ **DSP dei segnali con impulsi rettangolari**

■ **Problema:**

- lobi laterali creano interferenza sui canali adiacenti
- Es.: il primo lobo laterale è attenuato di soli 13.4 dB rispetto al lobo centrale



■ **Soluzione:**

- utilizzo di un **filtraggio a coseno rialzato** in trasmissione che soddisfa anche la condizione di Nyquist per l'assenza di ISI

■ **Banda assoluta del segnale modulante:**

$$B = \frac{1}{2}(1+r) \cdot D \quad \text{dove} \quad D = \frac{R}{\ell}$$

■ **Banda assoluta del segnale trasmesso** (con modulazione DSB-SC):

$$B_r = 2B \quad \longrightarrow \quad B_r = (1+r) \cdot \frac{R}{\ell}$$

## Efficienza spettrale per modulazioni con sagomatura a coseno rialzato

- **Efficienza spettrale della QAM con sagomatura a coseno rialzato:**

$$M = 2^\ell \quad \Rightarrow \quad \ell = \lg_2 M = \frac{\ln M}{\ln 2} \quad M: \text{numero di punti della costellazione}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{R}{B_T} = \frac{\ell}{1+r} = \frac{\ln M}{(1+r)\ln 2} \left[ \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}} \right]$$

Efficienza spettrale per QAM

- **Risultato importante perché pone in relazione l'efficienza con il numero di livelli**
- **Dato che la MPSK è un caso particolare della QAM, otteniamo lo stesso risultato:**

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{\ln M}{(1+r)\ln 2} \left[ \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}} \right]$$

Efficienza spettrale per MPSK