

I COMPITI DI FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Corsi di Laurea:
Ingegneria Informatica
Ingegneria Elettronica

2006 - 2008

PROF. G. Schembra

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

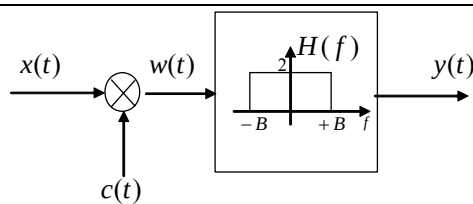
Prof. Giovanni Schembra

SOMMARIO

COMPITO 1 -	09 gennaio 2006.....	3
COMPITO 2 -	24 gennaio 2006.....	7
COMPITO 3 -	20 febbraio 2006	12
COMPITO 4 -	03 aprile 2006	17
COMPITO 5 -	03 maggio 2006 (prova in itinere)	19
COMPITO 6 -	19 giugno 2006	24
COMPITO 7 -	03 luglio 2006.....	29
COMPITO 8 -	17 luglio 2006.....	33
COMPITO 9 -	04 settembre 2006.....	37
COMPITO 10 -	25 settembre 2006.....	43
COMPITO 11 -	05 dicembre 2006	48
COMPITO 12 -	02 febbraio 2007	53
COMPITO 13 -	30 marzo 2007	57
COMPITO 14 -	10 maggio 2007 (prova in itinere)	62
COMPITO 15 -	18 giugno 2007	68
COMPITO 16 -	09 luglio 2007.....	73
COMPITO 17 -	03 settembre 2007.....	78
COMPITO 18 -	25 settembre 2007.....	83
COMPITO 19 -	30 novembre 2007	87
COMPITO 20 -	29 gennaio 2008.....	92
COMPITO 21 -	20 febbraio 2008	97
COMPITO 22 -	25 marzo 2008	103
COMPITO 23 -	20 giugno 2008	109
COMPITO 24 -	04 luglio 2008.....	114
COMPITO 25 -	05 settembre 2008.....	120
COMPITO 26 -	22 settembre 2008.....	125
COMPITO 27 -	28 novembre 2008	130

COMPITO 1 - 09 gennaio 2006

Quesito 1



Il segnale $x(t)$, passa basso con banda unilatera B , viene elaborato secondo lo schema di figura.

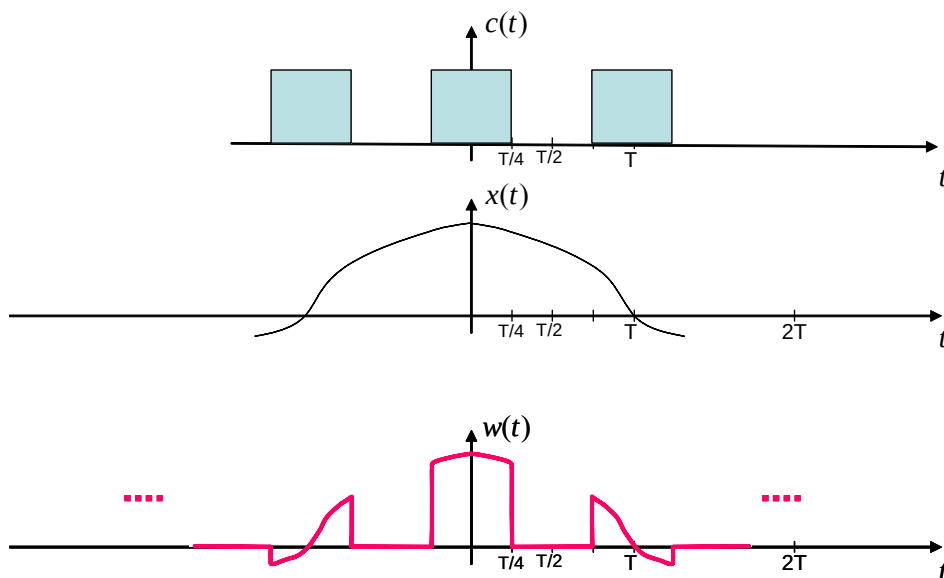
Sapendo che $c(t) = \sum_K \Pi\left(\frac{t-KT}{T/2}\right)$ e che $f_0 = 1/T = 2B$, si determini:

- 1) l'espressione e il grafico (accurato) del segnale $w(t)$;
- 2) lo spettro del segnale $w(t)$;
- 3) la potenza del segnale $w(t)$;
- 4) lo spettro del segnale $y(t)$;
- 5) la media del segnale $y(t)$;
- 6) la potenza del segnale $y(t)$;
- 7) l'energia del segnale $y(t)$.

SOLUZIONE

$$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{T} \text{sinc}(t/T)$$

$$1) \quad w(t) = \frac{1}{T} \text{sinc}(t/T) c(t) = \frac{1}{T} \text{sinc}(t/T) \sum_K \Pi\left(\frac{t-KT}{T/2}\right), \text{ dove } f_0 = 1/T \text{ e } B = \frac{1}{2T}.$$



$$2) \quad w(t) = \frac{1}{T} \text{sinc}(t/T) c(t) = \frac{1}{T} \text{sinc}(t/T) \sum_K \Pi\left(\frac{t-KT}{T/2}\right)$$

Poniamo $F = 1/T$.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

$$C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{C,k} \delta(f - kF), \text{ dove } F = 1/T, \text{ e } A_{C,k} = F H(nF) = F \frac{T}{2} \text{sinc}\left(nF \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} W(f) &= \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{T} \text{sinc}(t/T) \cdot \sum_K \Pi\left(\frac{t - KT}{T/2}\right)\right\} = \\ &= \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{T} \text{sinc}(t/T)\right\} * \mathfrak{F}\left\{\sum_K \Pi\left(\frac{t - KT}{T/2}\right)\right\} = \Pi\left(\frac{f}{F}\right) * \sum_k A_{C,k} \delta(f - kF) = \\ &= \sum_k A_{C,k} \Pi\left(\frac{f - kF}{F}\right) = \frac{1}{2} \sum_k \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \Pi\left(\frac{f - kF}{F}\right) \end{aligned}$$

3) Il segnale $w(t)$ non è periodico, ma si smorza per $t \rightarrow +\infty$. Quindi la potenza è nulla.

$$4) Y(f) = \left[\frac{1}{2} \sum_k \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \Pi\left(\frac{f - kF}{F}\right) \right] 2 \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) = \Pi\left(\frac{f}{F}\right)$$

$$5) \langle y(t) \rangle = 0$$

6) la potenza di $y(t)$ è nulla;

7) l'energia di $y(t)$ è $E_y = F$

Quesito 2

Si vuole trasmettere una sequenza di bit a velocità $R = 8$ kbit/s su un canale passabasso ideale con ampiezza di banda B_c . Calcolare i parametri del filtro di Nyquist (r, f_0, f_Δ, f_1) più economico da utilizzare per sagomare i bit in modo da non avere ISI nei seguenti casi:

1. $B_c = 12$ kHz
2. $B_c = 10$ kHz
3. $B_c = 6$ kHz
4. $B_c = 2$ kHz
5. $B_c = 1$ kHz

Nei casi in cui non è possibile annullare l'ISI utilizzando solo un filtro di Nyquist:

6. dire se è possibile progettare una codifica multilivello (specificando anche il valore l di livelli da utilizzare) nel caso in cui il canale introduca un rumore tale che il rapporto S/N misurato a destinazione è S/N=18dB.

Soluzione

1. Nel caso di $B_c = 12$ kHz, $r = \frac{2B_c}{R} - 1 = 2$. Dato che $r > 1$, è sufficiente formattare l'impulso con un coseno rialzato con $r = 1$, e non si avrà ISI. Gli altri valori sono: $f_0 = 1.5$ kHz, $f_\Delta = r f_0 = 1.5$ kHz, $f_1 = f_0 - f_\Delta = 0$ kHz.
2. Nel caso di $B_c = 10$ kHz, $r = \frac{2B_c}{R} - 1 = 1.5$. Così è sufficiente formattare l'impulso con un coseno rialzato con $r = 1$, e non si avrà ISI.
3. Nel caso di $B_c = 6$ kHz, $r = \frac{2B_c}{R} - 1 = 0.5$.
4. Nel caso di $B_c = 2$ kHz, $r = \frac{2B_c}{R} - 1 = -0.5 < 0$. Così non è possibile eliminare l'ISI, qualunque sia la forma dell'impulso.
5. Nel caso di $B_c = 1$ kHz, $r = \frac{2B_c}{R} - 1 = -0.75 < 0$. Così non è possibile eliminare l'ISI, qualunque sia la forma dell'impulso.
6. Nel caso $B_c = 2$ kHz bisogna usare un multilivello. Se usiamo $l = 2$, avremo $r = \frac{2B_c}{R/l} - 1 = 0$. Vediamo se il canale può supportare però questa bit-rate. La capacità di canale, secondo Shannon è

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

$B_c \log_2(1 + S/N) = 2000 \log_2(1 + 10^{0.118}) = 2000 \log_2(64) = 12000$. Quindi $R = 8$ kbit/s, e la codifica multilivello risolve il problema dell'ISI.

7. Nel caso $B_c = 1$ kHz bisognerebbe usare un multilivello. Se usiamo $l = 4$, avremo $r = \frac{2B_c}{R/l} - 1 = 0$. Vediamo se

il canale può supportare però questa bit-rate. La capacità di canale, secondo Shannon è $C = B_c \log_2(1 + S/N) = 1000 \log_2(1 + 10^{0.118}) = 1000 \log_2(64) = 6000$. Dato che $R = 8$ kbit/s $> C$, è impossibile trasmettere senza evitare ISI, persino con una codifica multilivello.

Quesito 3	min: 4 punti
------------------	---------------------

Dato il segnale passa-basso ideale $x(t) = 3 \cos(2\pi B_x t) + 1$ con $B_x = 1$ kHz, lo si vuole trasmettere replicato N volte su bande contigue nell'intervallo $[1, 3.8]$ MHz, modulando con portante $A_c = 5$ V. Supponendo che la prima e l'ultima replica siano ottenute con modulazione di frequenza, con $\beta = 3$, mentre le altre con modulazione di ampiezza, calcolare:

- 1) la portante e la potenza della prima replica
- 2) la portante e la potenza dell'ultima replica

Calcolare inoltre il valore di N , la portante e la potenza delle altre repliche, supponendo che per le altre repliche si utilizzi:

- 3) una modulazione di ampiezza pura;
- 4) una modulazione DSB-SC
- 5) una modulazione USSB
- 6) una modulazione LSSB

SOLUZIONE

$$B_{FM} = 2(\beta + 1)B_x = 8 \text{ kHz. } B_{AM} = 2B_x = 2 \text{ kHz. } B_{AM,SSB} = B_x = 1 \text{ kHz.}$$

$$1) f_{FM1} = 1M + \frac{B_{FM}}{2} = 1.004 \text{ kHz. } P_{FM} = \frac{A_c^2}{2} = 12.5 \text{ W}$$

$$2) f_{FM2} = 3.8M - \frac{B_{FM}}{2} = 3.796 \text{ kHz. } P_{FM} = \frac{A_c^2}{2} = 12.5 \text{ W}$$

$$3) \text{ MODULAZIONE AM: } N = \left\lfloor \frac{2800k - 8k - 8k}{2k} \right\rfloor = 1392;$$

$$\text{PORTANTI: } f_{AM,h} = 1000\text{kHz} + B_{FM} + \frac{B_{AM}}{2} + h \cdot B_{AM} = 1009 + h \cdot 2\text{kHz}, \text{ per } h = 0, \dots, N-1$$

$$P_{AM} = \frac{1}{2} A_c^2 + A_c^2 \langle m(t) \rangle + \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle = 12.5 + 25 \cdot 1 + 12.5 \cdot \left(\frac{9}{2} + 1 \right) = 106.25 \text{ W}$$

$$4) \text{ MODULAZIONE DSB-SC: } N = \left\lfloor \frac{2800k - 8k - 8k}{2k} \right\rfloor = 1392;$$

$$\text{PORTANTI: } f_{DSB-SC,h} = 1000\text{kHz} + B_{FM} + \frac{B_{AM}}{2} + h \cdot B_{AM} = 1009 + h \cdot 2\text{kHz}, \text{ per } h = 0, \dots, N-1$$

$$P_{DSB-SC} = \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle = 12.5 \cdot \left(\frac{9}{2} + 1 \right) = 68.75 \text{ W}$$

$$5) N = \left\lfloor \frac{2800k - 8k - 8k}{1k} \right\rfloor = 2798;$$

$$\text{PORTANTI: } f_{AM,USSB,h} = 1000\text{kHz} + B_{FM} + h \cdot \frac{B_{AM}}{2} = 1008 + h \cdot 1\text{kHz}, \text{ per } h = 0, \dots, N-1$$

$$P_{AM,USSB} = A_c^2 \langle m^2(t) \rangle = 25 \cdot \left(\frac{9}{2} + 1 \right) = 137.5 \text{ W}$$

$$6) N = \left\lfloor \frac{2800k - 8k - 8k}{1k} \right\rfloor = 2798;$$

$$\text{PORTANTI: } f_{AM,LSSB,h} = 1000\text{kHz} + B_{FM} + \frac{B_{AM}}{2} + h \cdot \frac{B_{AM}}{2} = 1009 + h \cdot 1\text{kHz}, \text{ per } h = 0, \dots, N-1$$

$$P_{AM,LSSB} = A_c^2 \langle m^2(t) \rangle = 25 \cdot \left(\frac{9}{2} + 1 \right) = 137.5 \text{ W}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (10 punti) MIN 5punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1.		2
2.		2
3.		1
4.		2
5.		1
6.		1
7.		1

QUESITO 2 (6 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1.		1
2.		1
3.		1
4.		1
5.		1
6.		5

QUESITO 3 (10 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1.		1
2.		1
3.		2
4.		1
5.		2
6.		1

Regole per superare il compito:

- 1) Ottenere almeno 16 punti

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 2 - 24 gennaio 2006

Quesito 1a

[Solo per i 9 crediti]

Si consideri la seguente funzione:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{a}{x\sqrt{x}} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$$

Determinare:

- 1) il valore di a tale che $f_{\xi}(x)$ sia una densità di probabilità
- 2) la distribuzione cumulativa $F_{\xi}(x)$
- 3) la probabilità che $0 \leq \xi \leq 4$
- 4) Il valore atteso di ξ , $E\{\xi\}$
- 5) Il valore quadratico medio di ξ , σ_{ξ}^2

SOLUZIONE

- 1) Dobbiamo imporre: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = 1$, cioè: $\int_1^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = 1$. Calcoliamo l'integrale:

$$\int_1^{+\infty} a x^{-\frac{3}{2}} dx = a \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^{+\infty} = -2a[0-1] = 2a \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

- 2) Per $x \geq 1$:

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(\sigma) d\sigma = \int_1^x \frac{1}{2\sigma\sqrt{\sigma}} d\sigma = \frac{1}{2} \int_1^x \sigma^{-\frac{3}{2}} d\sigma = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^x = -1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Per } x \leq 1: F_{\xi}(x) = 0$$

- 3) $\text{Prob}\{0 \leq \xi \leq 4\} = F_{\xi}(4) - F_{\xi}(0) = \frac{2-1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$$4) E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma f_{\xi}(\sigma) d\sigma = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} d\sigma = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \sigma^{-\frac{1}{2}} d\sigma = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^{+\infty} = +\infty$$

$$5) \text{ Analogamente: } E\{\xi^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 f_{\xi}(\sigma) d\sigma = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\sigma}}{2} d\sigma = +\infty$$

Quesito 1b

Dati i segnali periodici $x_1(t) = \frac{3A}{4} \sin(\pi Bt)$, $x_2(t) = -\frac{A}{4} \sin(3\pi Bt)$, e $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, determinare:

- 1) per il segnale $x_1(t)$, il grafico temporale, i suoi spettri delle ampiezze e delle fasi
- 2) per il segnale $x_2(t)$, il grafico temporale, i suoi spettri delle ampiezze e delle fasi
- 3) il periodo del segnale $x_1(t)$ e del segnale $x_2(t)$
- 4) il periodo del segnale $x(t)$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 5) l'espressione e il grafico della densità spettrale di potenza del segnale $x(t)$, indicando chiaramente le variabili poste su ascissa e ordinata, e i valori da esse assunte nei punti ritenuti di interesse
- 6) la potenza della fondamentale e della terza armonica (sugg.: considerare sia le frequenze positive che quelle negative)
- 7) il rapporto in dB tra le due potenze del punto 6

SOLUZIONE

- 1) Prima di tutto calcoliamo lo spettro bilatero di $x_1(t) = \frac{3A}{4} \sin(\pi Bt)$:

$X_1(f) = -j \frac{3}{8} A \left[\delta\left(f - \frac{B}{2}\right) - \delta\left(f + \frac{B}{2}\right) \right]$. Dunque gli spettri delle ampiezze e delle fasi sono rispettivamente:

$$|X_1(f)| = \frac{3}{8} A \left[\delta\left(f - \frac{B}{2}\right) + \delta\left(f + \frac{B}{2}\right) \right] \quad \text{e} \quad \phi_{x_1}(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & f > 0 \\ +\frac{\pi}{2} & f \leq 0 \end{cases}$$

- 2) Analogamente, per il segnale $x_2(t) = -\frac{A}{4} \sin(3\pi Bt)$, abbiamo:

$X_2(f) = j \frac{1}{8} A \left[\delta\left(f - \frac{3}{2} B\right) - \delta\left(f + \frac{3}{2} B\right) \right]$. Dunque gli spettri delle ampiezze e delle fasi sono rispettivamente:

$$|X_2(f)| = \frac{1}{8} A \left[\delta\left(f - \frac{3}{2} B\right) + \delta\left(f + \frac{3}{2} B\right) \right] \quad \text{e} \quad \phi_{x_2}(f) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & f > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & f \leq 0 \end{cases}$$

- 3) I periodi dei due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono: $T_1 = \frac{2}{B}$ $T_2 = \frac{2}{3B}$
- 4) Il periodo del segnale somma sarà il minimo comune multiplo tra i periodi dei segnali componenti, cioè: $T = mcm\{T_1, T_2\} = \frac{2}{B}$.
- 5) La DSP del segnale $x(t)$

$$\mathcal{P}_w(f) = |X(f)|^2 = \frac{9}{64} A^2 \delta\left(f - \frac{B}{2}\right) + \frac{9}{64} A^2 \delta\left(f + \frac{B}{2}\right) + \frac{1}{64} A^2 \delta\left(f - \frac{3}{2} B\right) + \frac{1}{64} A^2 \delta\left(f + \frac{3}{2} B\right)$$

- 6) Le potenze trasportate dalla prima e dalla terza sono rispettivamente:

$$P_{x,1} = 2 \cdot \frac{9}{64} A^2 = \frac{9}{32} A^2 \quad \text{e} \quad P_{x,3} = 2 \cdot \frac{1}{64} A^2 = \frac{1}{32} A^2$$

- 7) Il rapporto in dB tra le due potenze è:

$$r = 10 \log_{10} \frac{P_{x,1}}{P_{x,2}} = 10 \log_{10} 9 = 9.54 \text{ dB}$$

Quesito 2

Si deve progettare un sistema di trasmissione che utilizza la tecnica PCM per trasmettere un segnale analogico $x(t)$, che ha un picco positivo di 10 V, e un picco negativo di -10 V, che occupa uno spettro compreso tra 0 Hz e 5500 Hz, e che viene campionato con una banda di guardia pari a 200 Hz. Supponendo che il rumore di canale introduca una probabilità di errore sul bit pari a p_e non nota, ma

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

che abbassa il rapporto segnale/rumore a destinazione di non più di 3 dB (funzionamento sopra soglia). Calcolare:

1. il numero di bit richiesti dal quantizzatore affinché il rapporto segnale/rumore medio a destinazione sia di almeno 80 dB
2. il valore del rapporto segnale/rumore di quantizzazione effettivamente ottenuto
3. la probabilità di errore che il sistema deve avere per lavorare sopra soglia
4. la minima frequenza di campionamento necessaria per non introdurre aliasing
5. Il valore dei primi due istanti di campionamento dopo l'istante $t=0$
6. il massimo errore di quantizzazione che il ricostruttore del segnale può commettere a destinazione
7. il bit rate necessario

Soluzione

- 1) Siccome il rapporto segnale/rumore di quantizzazione in uscita dal sistema peggiora di 3 dB in corrispondenza della probabilità di errore di soglia p_e^* , bisogna lasciare 3 dB di margine per rispettare le specifiche sul rapporto segnale/rumore. Per cui dobbiamo scegliere un numero di bit tale che il SNR medio sia di 83 dB in sorgente. Applicando la regola dei 6 dB, abbiamo che:

$$n = \left\lceil \frac{83}{6} \right\rceil = \lceil 13.83 \rceil = 14$$

- 2) L'SNR medio effettivamente ottenuto quando si utilizzano 14 bit è: $SNR_{medio} = 6 \cdot 14 = 84 \text{ dB}$

- 3) La massima probabilità di errore che il sistema deve avere per lavorare sopra soglia è:

$$P_e^* = \frac{1}{4(M^2 - 1)} = \frac{1}{4(2^{14} - 1)} = 9.3132 \cdot 10^{-10}$$

- 4) la minima frequenza di campionamento necessaria è: $f_s = 2 \cdot B + B_G = 11200 \text{ Hz}$.

- 5) Il periodo di campionamento è $T_s = 1/f_s = 8.9286 \cdot 10^{-5}$. Il valore dei primi due istanti di campionamento dopo l'istante $t=0$ sono: $t_1 = 8.9286 \cdot 10^{-5}$ e $t_2 = 1.7857 \cdot 10^{-4}$

- 6) Il massimo errore di quantizzazione è $e_{q,max} = \pm \Delta/2 = \pm \frac{1}{2} \frac{V_{PP}}{M} = \pm \frac{1}{2} \frac{2V_P}{M} = \pm \frac{10}{2^{14}} \rightarrow$

$$e_{q,max} = \pm 6.1 \cdot 10^{-4}$$

- 7) Il bit rate necessario è $R = n f_s$, dove f_s è la frequenza di campionamento. Quindi

$$R = n f_s = 156800 \text{ bit/sec.}$$

Quesito 3

Si supponga di voler trasmettere con modulazione FM il segnale $x(t) = 3 \cos(9000\pi t)$, utilizzando una portante con ampiezza di 2 V ad una frequenza $f_c = 10 \text{ MHz}$. Calcolare:

- 1) la potenza del segnale FM;
- 2) l'indice di modulazione da utilizzare nel caso in cui si voglia un rapporto segnale rumore in uscita al demodulatore di 30 dB nell'ipotesi in cui il canale introduca un rumore additivo di tipo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza costante e pari a $N_0/2 = 27 \mu\text{W/Hz}$;
- 3) il rapporto segnale/rumore in ingresso al demodulatore;
- 4) la banda di Carson del segnale;
- 5) la potenza del segnale modulato nella banda di Carson.

SOLUZIONE

- 1) la potenza del segnale FM è $P_s = \frac{A_c^2}{2} = 2 \text{ W}$;

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 2) l'indice di modulazione può essere calcolato dall'equazione $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{3A_c^2 \langle m^2 \rangle \beta_f^2 / V_p^2}{2N_0 B}$,

imponendo che $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 30 \text{ dB} = 10^{\frac{30}{10}} = 1000$

$$\beta_f = \sqrt{\frac{2N_0 B V_p^2}{3A_c^2 P_m} \left(\frac{S}{N}\right)_{out}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 54 \cdot 10^{-6} \cdot 4500 \cdot 9}{3 \cdot 4 \cdot (9/2)}} 1000 = 9$$

- 3) il rapporto segnale/rumore in ingresso al demodulatore;

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A_c^2}{4N_0 (\beta_f + 1)B} = 4.11 \cdot 10^{-1}$$

- 4) la banda di Carson del segnale;

$$B_s = 2(\beta_f + 1)B = 90 \text{ kHz}$$

- 5) la potenza del segnale modulato nella banda di Carson può essere calcolata dalla definizione di banda di Carson, che è quella banda che contiene il 98% della potenza complessiva. Quindi la potenza nella banda di Carson è $P_{Carson} = 0.98 \cdot P_s = 1.96 \text{ W}$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1a [solo 9 crediti] (4 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1		1
2		1
3		1

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
4		0.5
5		0.5

QUESITO 1b [per 9 crediti: (10 punti) MIN 4 punti] **[per 6 crediti: (10 punti) MIN 6 punti]**

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
8.		2
9.		1
10.		0.5
11.		2
12.		2
13.		2
14.		0.5

QUESITO 2 (10 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
7.		2
8.		1
9.		2
10.		1
11.		1
12.		1
13.		2

QUESITO 3 (10 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1		2
2		3
3		2

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
4		1
5		2

Regole per superare il compito:
Ottenere almeno 16 punti

COMPITO 3 - 20 febbraio 2006

Quesito 1a	[Solo per i 9 crediti]
-------------------	-------------------------------

Sia X la variabile casuale che conta il numero di volte con cui esce un numero maggiore o uguale a 5 su ogni lancio, lanciando 3 volte un dado. Nell'ipotesi che il dado sia regolare, si determini:

- 1) La funzione densità di probabilità di X
- 2) La funzione cumulativa di probabilità di X
- 3) Il valore medio di X
- 4) La varianza di X

SOLUZIONE

La variabile X può assumere valore compresi nell'intervallo $[0,3]$. In particolare, X è una v.a. bernoulliana con probabilità di successo $p = 2/6 = 1/3$, $n = 3$ prove;

$$1) f_X(x) = P_{0,n}\delta(x) + P_{1,n}\delta(x-1) + P_{2,n}\delta(x-2) + P_{3,n}\delta(x-3), \text{ dove } P_{k,n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$$

$$P_n(k) = [0.296 \quad 0.4444 \quad 0.2222 \quad 0.0370]$$

2) La cumulativa è:

$$F_X(x) = P_{0,n}u(x) + P_{1,n}u(x-1) + P_{2,n}u(x-2) + P_{3,n}u(x-3)$$

Ha forma a gradini, con le seguenti altezze:

$$[0 \quad 0.296 \quad 0.7407 \quad 0.9630 \quad 1]$$

3) La media è:

$$\mu = \sum_{k=0}^3 k f_X(k) = 1$$

4) Il valore quadratico medio è: $E\{X^2\} = 1.6667$. Quindi la varianza è: $\sigma^2 = E\{X^2\} - \mu^2 = 0.667$

Quesito 1b	
-------------------	--

Dato il segnale $x(t)$ periodico di periodo $T_x = 10$ msec, i cui coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono:

$$c_n = \begin{cases} 2 & \text{per } n = 0 \text{ e } n = \pm 2 \\ 1 & n = \pm 1 \\ -1 & n = \pm 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare:

- a) lo spettro del segnale $y(t)$ ottenuto all'uscita del sistema lineare tempo invariante la cui funzione di trasferimento è $H(f) = K \Lambda\left(\frac{f-2F_x}{2F_x}\right) + K \Lambda\left(\frac{f+2F_x}{2F_x}\right)$, con $K=2$, e al cui ingresso è posto il segnale $x(t)$.
- b) il periodo del segnale $y(t)$
- c) l'energia del segnale $y(t)$
- d) la densità spettrale di potenza di $y(t)$

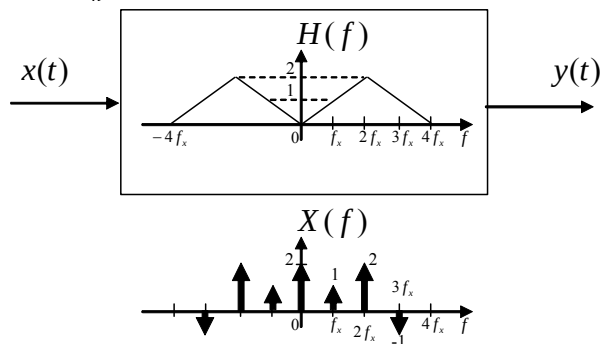
FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- e) il guadagno in potenza in dB ottenuto con il sistema $H(f)$
 f) trovare il guadagno K del filtro $H(f)$ tale che il suo guadagno in potenza sia $G_H = 2.5$ dB

SOLUZIONE

La frequenza del segnale $x(t)$ è $F_x = 100$ Hz. Graficamente abbiamo:



dove $X(f) = 2\delta(f) + \delta(f - F_x) + \delta(f + F_x) + 2\delta(f - 2F_x) + 2\delta(f + 2F_x) - \delta(f - 3F_x) - \delta(f + 3F_x)$.

- a) Lo spettro del segnale $y(t)$ risulta allora:

$$Y(f) = \delta(f - F_x) + \delta(f + F_x) + 4\delta(f - 2F_x) + 4\delta(f + 2F_x) - \delta(f - 3F_x) - \delta(f + 3F_x)$$

- b) Dallo spettro del segnale $y(t)$ notiamo che il segnale è periodico, con la stessa frequenza fondamentale di $x(t)$. Dunque il periodo di $y(t)$ è $T_x = 10$ msec.

- c) Dato che il segnale $y(t)$, la sua energia è $E_y = \infty$

- d) La densità spettrale di potenza di $y(t)$ è:

$$DSP_y(f) = \frac{K^2}{4}\delta(f - F_x) + \frac{K^2}{4}\delta(f + F_x) + 4K^2\delta(f - 2F_x) + 4K^2\delta(f + 2F_x) + \frac{1}{4}K^2\delta(f - 3F_x) + \frac{1}{4}K^2\delta(f + 3F_x)$$

$$DSP_y(f) = \delta(f - F_x) + \delta(f + F_x) + 16\delta(f - 2F_x) + 16\delta(f + 2F_x) + \delta(f - 3F_x) + \delta(f + 3F_x)$$

- e) Per calcolare il guadagno in potenza in dB ottenuto con il sistema $H(f)$, calcoliamo prima le potenze di $x(t)$ e di $y(t)$:

$$P_x = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 = 16 \text{ W} \quad \text{e} \quad P_y = 1 + 1 + 16 + 16 + 1 + 1 = 36 \text{ W}$$

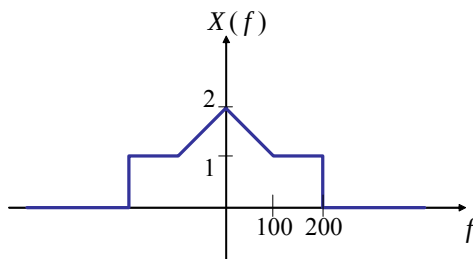
$$\text{Quindi il guadagno in dB è: } G_H = 10 \log_{10} P_y / P_x = 3.52 \text{ dB}$$

- f) Imponiamo che il guadagno in potenza sia: $G_H = 2.5$ dB. Dunque, e infine $g = 10^{0.25} = 1.778$.

$$\text{Allora } P_y = P_x \cdot g = 28.45 \text{ W. Ma } P_y = \frac{K^2}{4} + \frac{K^2}{4} + 4K^2 + 4K^2 + \frac{K^2}{4} + \frac{K^2}{4} = 28.45$$

$$9K^2 = 28.45 \rightarrow K = 1.778$$

Quesito 2



Dato il segnale $x(t)$ il cui spettro è rappresentato in figura, determinare:

- a) il massimo periodo di campionamento T_c necessario per poter ricostruire il segnale
 b) il minimo numero di campioni per rappresentare il segnale in 10 secondi
 c) il valore dei primi 3 campioni calcolati a partire da $t = 0$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- d) il valore all'istante T_C del segnale ricostruito con interpolazione cardinale
- e) il valore all'istante $1.5 T_C$ del segnale ricostruito con interpolazione a mantenimento
- f) la funzione di trasferimento del filtro da utilizzare per la ricostruzione del segnale originale
- g) la banda necessaria per trasmettere il segnale ottenuto dal suddetto segnale, codificandolo in PCM con legge μ , con parole di codice di 6 bit, e formattando gli impulsi con coseno rialzato a $r = 0.6$
- h) il valore di μ affinché il rapporto segnale/rumore medio a destinazione sui campioni prossimi al picco sia di 23.4 dB, supponendo che il canale attenui di 3 dB.

SOLUZIONE

Lo spettro del segnale è $X(f) = \Pi\left(\frac{f}{400}\right) + \Lambda\left(\frac{f}{100}\right)$.

Dunque $x(t) = 400 \cdot \text{sinc}(400t) + 100 \cdot \text{sinc}^2(100t)$.

- a) la minima frequenza di campionamento è: $F_C = 2 B_x = 2 \cdot 200 = 400 \text{ Hz}$. Dunque

$$T_C = 1/F_C = 2.5 \text{ msec.}$$

- b) dal teorema della dimensionalità, il minimo numero di campioni per rappresentare il segnale in 10 secondi è: $N = 2 B T_0 = 2 \cdot 200 \cdot 10 = 4000$ campioni.

- c) il valore dei primi 3 campioni calcolati a partire da $t=0$ sono calcolati agli istanti: $0, 2.5000e-003, 5.0000e-003$ e risultano: $[500, 81.057, 40.53]$.

- d) dato che l'interpolatore cardinale mantiene inalterato il segnale agli istanti di campionamento, il valore all'istante T_C del segnale ricostruito con interpolazione cardinale è proprio $[81.057]$.

- e) il valore all'istante $1.5 T_C$ del segnale ricostruito con interpolazione a mantenimento coincide con il campione precedente, cioè: $[81.057]$

- f) la funzione di trasferimento del filtro da utilizzare per la ricostruzione del segnale originale è

$$H(f) = T_C \Pi\left(\frac{f}{2 B_x}\right) = 2.5 \cdot 10^{-3} \Pi\left(\frac{f}{400}\right).$$

- g) la banda necessaria per trasmettere il segnale ottenuto dal suddetto segnale, codificandolo in PCM con legge μ , con parole di codice di 6 bit, e formattando gli impulsi con coseno rialzato a $r = 0.6$ è:

$$B = \frac{1+r}{2} n F_C = 1.92 \text{ kHz}$$

- h) Dato che il canale attenua di 3 dB, il rapporto segnale/rumore medio in sorgente deve essere di 26.4 dB. Poiché il rapporto segnale/rumore medio si calcola come

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB, medio}^{(\mu)} = 6.02 n + 4.77 - 20 \log_{10}(\ln(1 + \mu)) \text{ dB, possiamo calcolare } \mu \text{ come segue:}$$

$$20 \log_{10}(\ln(1 + \mu)) = 6.02 n + 4.77 - \left(\frac{S}{N}\right)_{dB, medio}^{(\mu)}$$

$$\ln(1 + \mu) = 10^{\left[\frac{1}{20} \left(6.02 n + 4.77 - \left(\frac{S}{N}\right)_{dB, medio}^{(\mu)}\right)\right]} \rightarrow \mu = 200$$

$$\mu = \exp\left\{10^{\left[\frac{1}{20} \left(6.02 n + 4.77 - \left(\frac{S}{N}\right)_{dB, medio}^{(\mu)}\right)\right]}\right\} - 1$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Quesito 3

Dati i 3 campioni $x_0=0.12$, $x_1=1.1$ e $x_2=-1.4$ di un segnale in banda base campionato con periodo di campionamento $T_c = 1$ msec, dopo aver applicato una codifica PCM a 3 bit con valore picco-picco

$V_{pp} = 4$ V simmetrico rispetto alla polarità 0V, e codifica Gray, determinare:

- la sequenza di bit ottenuta
- la banda necessaria per trasmettere in banda base il segnale, supponendo di utilizzare un impulso a coseno rialzato a $r = 0.2$ e una codifica di linea polare NRZ con ampiezza $A = 1$ V.
- l'intervallo di frequenze necessarie per trasmettere lo stesso segnale modulato con modulazione BPSK con portante di frequenza $f_c = 1$ MHz e ampiezza $A_c = 2$ V.
- la potenza del segnale modulato del caso precedente
- il valore del segnale modulato nell'istante $\bar{t} = 1.3458$ msec

SOLUZIONE

Data una sequenza di T_c campioni al secondo codificati con n bit, la bit rate è:

$$R = n f_c = \frac{n}{T_c} = \frac{3}{1 \cdot 10^{-3}} = 3 \text{ kbit/s}$$

e dunque un bit verrà trasmesso in un tempo $T_b = \frac{1}{R} = 33.33 \text{ ms}$.

- a) l'ampiezza dei livelli PCM è $\Delta = \frac{V_{pp}}{M} = \frac{V_{pp}}{2^n} = 0.5$ V. Allora, secondo la codifica Gray

110
111
101
100
000
001
011
010

, abbiamo: **100 111 011**

- b) La banda necessaria per trasmettere

$$B = \frac{1+r}{2} R = \frac{1+r}{2T_c} = 600 \text{ Hz}$$

- c) La modulazione BPSK può essere assimilata ad una modulazione di ampiezza. Pertanto la banda necessaria è $B_s = 2B = 1200$ Hz. Quindi l'intervallo di frequenze è **[999400, 1000600]**

- d) La potenza di una modulazione di fase è $P = \frac{A_c^2}{2} = 2$ W

- e) Il segnale modulato è: $s(t) = -A_c m(t) \sin \omega_c t$. Dato che si acquisisce un campione ogni $T_c = 1$ ms, e che si trasmette 1 bit ogni $T_b = \frac{1}{R} = 33.33$ ms, all'istante $\bar{t} = 1.3458$ msec si è già acquisito il secondo campione, e si sta trasmettendo il secondo bit relativo ad esso, che è il bit "1". Dunque, assumendo una codifica polare (dato che stiamo utilizzando una modulazione BPSK) ad ampiezza $A = 1$ V, $m(t_0) = +A = +1$ V. Allora:

$$s(\bar{t}) = -A_c m(\bar{t}) \sin \omega_c \bar{t} = -2 \cdot (+1) \cdot \sin(2\pi 10^6 1.3458) = 1.9021 \text{ V}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1a [solo 9 crediti] (4 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
a)		2
b)		1

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
c)		0.5
d)		0.5

QUESITO 1b [per 9 crediti: (10 punti) MIN 4 punti] [per 6 crediti: (10 punti) MIN 6 punti]

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
15.		2
16.		2
17.		1
18.		1
19.		2
20.		2

QUESITO 2 (10 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
a.		1
b.		1
c.		1
d.		1.5
e.		1
f.		1
g.		1.5
h.		2

QUESITO 3 (10 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
a.		2
b.		1
c.		2

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
d.		2
e.		3

Regole per superare il compito:
Ottenere almeno 15 punti

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 4 - 03 aprile 2006

Quesito 1a

[Solo per i 9 crediti]

Se i risultati dei lanci di un dado sono caratterizzati da una funzione di probabilità $\psi_{\xi}(x) = 0.2\delta(x-1) + 0.1\delta(x-2) + 0.1\delta(x-3) + 0.2\delta(x-4) + 0.3\delta(x-5) + D\delta(x-6)$:

- 5) dire se $\psi_{\xi}(x)$ è una funzione densità di probabilità (pdf) o una funzione distribuzione cumulativa (cdf), e determinare il parametro D ;
- 6) calcolare l'altra funzione caratteristica (pdf o cdf);
- 7) calcolare il valor medio
- 8) calcolare la varianza
- 9) dire se il dado è truccato o meno, e perché.

Quesito 1b

Dato il segnale $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-6k}{2}\right) + \Pi\left(\frac{t-6k}{1}\right)$:

1. dire se il segnale è periodico ed eventualmente calcolarne il periodo
2. disegnare il grafico temporale del segnale
3. calcolare il valore del segnale a $t = 0.25$ e $t = 0.75$;
4. calcolare la densità spettrale di potenza del segnale;
5. calcolare il valore medio del segnale
6. calcolare l'energia del segnale
7. calcolare la potenza del segnale
8. calcolare il guadagno in potenza in dB di un filtro passa-basso con frequenza di taglio $f_c = 0.2$, se gli si mette in ingresso il segnale $x(t)$
9. calcolare la funzione di autocorrelazione all'uscita del filtro quando in ingresso si pone il segnale $x(t)$.

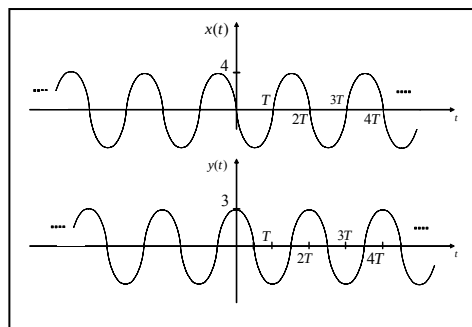
Quesito 2

Dati i segnali sinusoidali $x(t)$ e $y(t)$ entranti nel sistema di figura, con $T = 1$ ms.

- 1) Scrivere l'espressione del segnale $x(t)$ e del segnale $y(t)$
- 2) Calcolare la banda del segnale $z(t)$ ottenuto come prodotto di $x(t)$ e $y(t)$

Supponendo di utilizzare un codificatore PCM a 16 livelli determinare:

- 3) il periodo di campionamento T_c tale da avere una banda di guardia $B_g = 1.5$ kHz.
- 4) i valori dei primi 3 campioni dall'origine dei tempi: $z_0 = z(0)$, $z_1 = z(T_c)$ e $z_2 = z(2T_c)$.
- 5) la tabella della codifica Gray da utilizzare per codificare a 16 livelli
- 6) la sequenza di bit ottenuta all'uscita del codificatore PCM relativamente ai 3 campioni del punto precedente, supponendo di utilizzare codifica Gray
- 7) la sequenza di bit all'uscita del codificatore differenziale relativi ai 3 campioni del punto precedente
- 8) la banda al primo nullo del segnale, nell'ipotesi che il codificatore di linea applichi una codifica NRZ polare a impulso rettangolare
- 9) la massima probabilità di errore sul bit del canale affinché il rapporto segnale/rumore di picco a destinazione sia almeno pari a 27 dB.
- 10) la massima probabilità di errore sul bit del canale affinché il rapporto segnale/rumore di picco a destinazione sia almeno pari a 30 dB.
- 11) la banda di canale necessaria se si vuol trasmettere il segnale senza ISI formattando l'impulso a cos rialzato con $r = 0.5$, e con codifica NRZ polare multilivello a 3 bit.



Quesito 3

Dato il segnale $x(t) = \text{sinc}(2000t)$, calcolare:

1. lo spettro delle ampiezze del segnale
2. la banda del segnale $x(t)$
3. la media del segnale $x(t)$
4. la potenza media del segnale $x(t)$
5. i primi 3 campioni, a partire dall'istante $t = 0$, del segnale $s(t)$ ottenuto modulando in AM il segnale $x(t)$, con una portante a frequenza $f_c = 2$ MHz e ampiezza $A_c = 3$ V
6. la potenza media trasportata dal segnale $s(t)$
7. la potenza di picco del segnale $s(t)$
8. la portante che si dovrebbe utilizzare per ottenere un segnale modulato in modulazione di frequenza, $s_{FM}(t)$, avente la stessa potenza di $s(t)$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1a [solo 9 crediti] (4 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		0.5
2)		1
3)		1

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
4)		1
5)		0.5

QUESITO 1b [per 9 crediti: (10 punti) MIN 4 punti] **[per 6 crediti: (10 punti) MIN 6 punti]**

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		0.5
2)		1
3)		1
4)		1
5)		1

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
6)		1
7)		1
8)		2
9)		1.5

QUESITO 2 (10 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1
5)		1
6)		0.5

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
7)		1
8)		0.5
9)		1
10)		1
11)		1

QUESITO 3 (10 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1

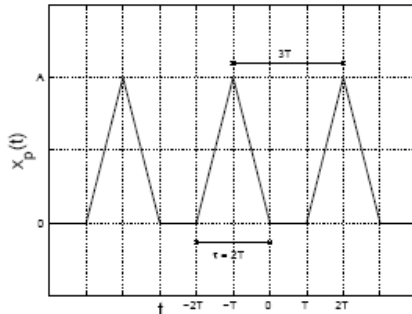
DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
5)		2
6)		2
7)		1
8)		1

Regole per superare il compito:

- 2) Ottenere almeno 15 punti

COMPITO 5 - 03 maggio 2006 (prova in itinere)

Quesito 1



Dato il segnale in figura, calcolare:

- 1) la sua espressione analitica
- 2) il suo spettro delle ampiezze (espressione e grafico)
- 3) il suo spettro delle fasi (espressione e grafico)
- 4) la sua potenza
- 5) la sua energia
- 6) la sua media temporale

SOLUZIONE

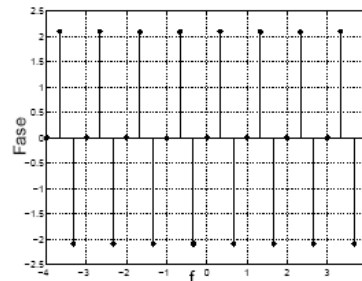
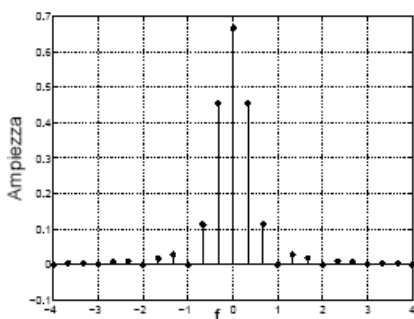
$$1) x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{T_1}(t - nT_0), \text{ dove } x_{T_1}(t) = A\Lambda\left(\frac{t+T_1}{T_1}\right) \rightarrow x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\Lambda\left(\frac{t+T_1-nT_0}{T_1}\right)$$

Notiamo che $\frac{T_0}{T_1} = 3$

$$2) X_{T_1}(f) = AT_1 \text{sinc}^2(fT_1) e^{j2\pi f T_1} \rightarrow X_p(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k AT_1 \text{sinc}^2\left(\frac{k}{T_0} T_1\right) e^{j2\pi k \frac{T_1}{T_0}} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = \frac{A}{3} \sum_k \text{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) e^{j2\pi \frac{k}{3}} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$\text{e quindi: } |X_p(f)| = \frac{A}{3} \sum_k \text{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$3) \angle X_p(f) = \sum_k \left(\frac{2}{3} k\pi\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$



4) La potenza si può calcolare come segue:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} A^2 \left(\frac{t+T_1}{T_1}\right)^2 dt = \frac{1}{T_0} 2 \int_0^{T_1} \left(\frac{A}{T_1} t\right)^2 dt = \frac{1}{T_0} 2 \int_0^{T_1} \frac{A^2}{T_1^2} t^2 dt = \frac{1}{T_0} 2 \frac{A^2}{T_1^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T_1} = \frac{2A^2}{T_0 T_1^2} \frac{T_1^3}{3} = \frac{2}{3} \frac{A^2 T_1}{T_0} = \frac{2}{9} A^2$$

5) L'energia è $E_x = +\infty$ poiché il segnale è periodico.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

6) La media temporale è:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \Lambda\left(\frac{t+T_1}{T_1}\right) dt = \frac{1}{T_0} \text{Area}_{\text{triangolo}} = \frac{1}{T_0} \frac{2T_1 \cdot A}{2} = \frac{A}{3}$$

Quesito 2

Si supponga di avere una variabile casuale X con funzione densità di probabilità data da:

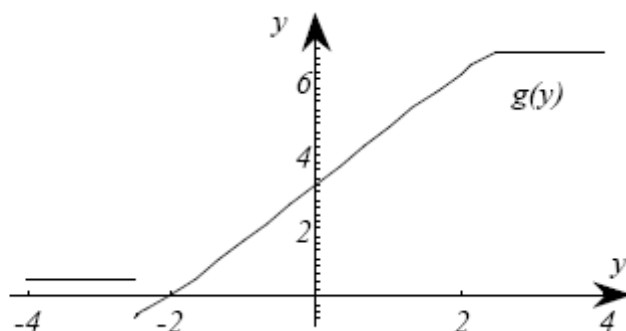
$$f_x(x) = \begin{cases} K \cos\left(\pi \frac{1}{2A} x\right) & -A \leq x \leq A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \text{ e si supponga che tale variabile venga posta in ingresso ad un sistema } \Sigma \text{ con}$$

$$\text{caratteristica ingresso-uscita data da: } y = \begin{cases} 3 + A \sin\left(\pi \frac{1}{2A} x\right) & -A/2 \leq x \leq A/2 \\ B & x > A/2 \\ 0.5 & x < -A/2 \end{cases}. \text{ Calcolare:}$$

- 1) il valore della costante K affinché $f_x(x)$ sia una funzione densità di probabilità
- 2) il grafico della caratteristica ingresso-uscita del sistema Σ
- 3) la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria Y all'uscita del sistema Σ
- 4) la probabilità $\text{Prob}\{X \leq C\}$
- 5) la probabilità $\text{Prob}\{Y = B\}$

SOLUZIONE

Disegnando la $y = g(x)$ per $A = 5$ si ha:



Nel tratto $|x| < A/2$ la funzione $y = g(x)$ è invertibile, e si può applicare la formula: $f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$, ove

$$y = 3 + A \sin\left(\frac{\pi x}{2A}\right). \text{ Dunque } x = \frac{2A}{\pi} \arcsin\left(\frac{y-3}{A}\right)$$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{A} \frac{2A}{\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y-3}{A}\right)^2}} \right| = \frac{2A^2}{\pi} \frac{1}{|A^2 - y^2 - 9 + 6y|}$$

e dunque

$$f_y(y) = K \cos\left[\frac{\pi}{2A} \frac{2A}{\pi} \arcsin\left(\frac{y-3}{A}\right)\right] = K \cos\left[\arcsin\left(\frac{y-3}{A}\right)\right]$$

$$\int_{-A}^{+A} K \cos\frac{\pi x}{2A} dx = 1 = K \frac{2A}{\pi} \left[\sin\frac{\pi x}{2A} \right]_{-A}^{+A} = \frac{4AK}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4AK}{\pi}. \text{ Quindi } \boxed{K = \frac{\pi}{4A}}$$

Per $x \geq \frac{A}{2}$, l'uscita y è sempre uguale a $P(y = B) = P\left(x \geq \frac{A}{2}\right)$

In questo caso la $f_y(y)$ diventa una δ di Dirac in B di ampiezza pari a:

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

$$P\left(x \geq \frac{A}{2}\right) = \int_{A/2}^{\infty} \frac{\pi}{4A} \cos \frac{\pi x}{2A} dx = \int_{A/2}^A \frac{\pi}{4A} \frac{2A}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{2A} \right]_{A/2}^A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Similmente, per $x \leq -\frac{A}{2}$, la $f_y(y)$ diventa una δ di Dirac in 0.5 di ampiezza pari a:

$$P\left(x \leq -\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Infine possiamo concludere che:

$$f_y(y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) [\delta(y - 0.5) + \delta(y - B)] + \frac{\pi}{4A} \cos \left[\arcsin \left(\frac{y-3}{A} \right) \right] \text{rect} \left(\frac{y}{A} \right)$$

6) la probabilità $\text{Prob}\{X \leq C\} = 1$

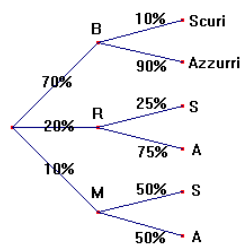
7) la probabilità $\text{Prob}\{Y = B\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Quesito 3

In un paese scandinavo il 70% delle ragazze ha i capelli Biondi, il 20% li ha Rossi, il 10% Mori. Risulta poi che ha gli occhi Scuri il 10% delle Bionde, il 25% delle Rosse, il 50% delle More. Se la ragazza con cui ho fatto amicizia tramite Internet mi fa sapere che ha gli occhi Scuri, che probabilità c'è che sia Bionda?

SOLUZIONE

B	R	M	
70%	20%	10%	della popolazione femminile
10%	25%	50%	occhi Scuri



Risoluzione con la formula di Bayes:

$$\begin{aligned} p(B) &= 0,7 & p(R) &= 0,2 & p(M) &= 0,1 \\ p(S/B) &= 0,1 & p(S/R) &= 0,25 & p(S/M) &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(B/S) &= \frac{p(B) \cdot p(S/B)}{p(B) \cdot p(S/B) + p(R) \cdot p(S/R) + p(M) \cdot p(S/M)} = \\ &= \frac{0,7 \cdot 0,1}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,5} = \frac{0,07}{0,07 + 0,05 + 0,05} = \frac{0,07}{0,17} \approx 0,41 = 41\% \end{aligned}$$

Quesito 4

Sia $x(t)$ un processo aleatorio ergodico. Di tale processo si conosce unicamente una realizzazione, $x_1(t)$, che è un'onda quadra di periodo 1 sec, con valore di picco pari a 1, e tale da avere una transizione positiva in $t = 0$. Sia $y(t)$ il processo aleatorio definito da $Ax_1(t)$, essendo A una variabile aleatoria uniformemente distribuita fra 0 e 1.

- 1) Trovare, se possibile, valor medio e potenza media del processo $x(t)$
- 2) Calcolare la funzione densità di probabilità di $y(t)$
- 3) Calcolare il valor medio statistico di $y(t)$
- 4) Il processo $y(t)$ è stazionario? Giustificare la risposta.

SOLUZIONE

- 1) Poiché il processo è ergodico, è possibile calcolare le sue statistiche di insieme mediante le statistiche temporali di una qualsiasi realizzazione. Il valor medio è $\frac{1}{2}$ e la potenza media è $\frac{1}{2}$.
- 2) La pdf di $y(t)$ è: $f_y(y, t) = \begin{cases} \Pi\left(\frac{a}{1/2}\right) & \text{se } \exists k \text{ tale che } : t \in [2k, 2k+1] \text{ (cioè dove l'onda quadra non è nulla)} \\ \delta(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 3) Il valor medio statistico di $y(t)$ è: $E\{y, t\} = \begin{cases} 0.5 & \text{se } \exists k \text{ tale che } : t \in [2k, 2k+1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- 4) Ovviamente no, visto che, ad esempio, il valor medio di $y(t)$ per $t = 0.1$ sec vale 0.5, mentre il valor medio in $t = 0.6$ sec vale 0.

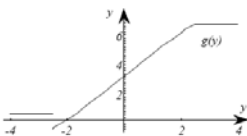
FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (8 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)	$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A \Lambda\left(\frac{t+T_1-nT_0}{T_1}\right)$	1
2)	$X_p(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k A T_1 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{T_0} T_1\right) e^{j2\pi k \frac{T_1}{T_0}} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = \frac{A}{3} \sum_k \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right) e^{j2\pi \frac{k}{3}} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$	2
3)	$\angle X_p(f) = \sum_k \left(\frac{2}{3} k \pi\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$	2
4)	$P_x = \frac{2}{9} A^2$	1
5)	$E_x = +\infty$	1
6)	$\langle x(t) \rangle = \frac{A}{3}$	1

QUESITO 2 (8 punti) MIN 6 punti sommando il quesito 2 e il quesito 3

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)	$K = \frac{\pi}{4A}$	1
2)	 per $A=5$	1
3)	$f_y(y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) [\delta(y-0.5) + \delta(y-B)] + \frac{\pi}{4A} \cos\left[\arcsin\left(\frac{y-3}{A}\right)\right] \operatorname{rect}\left(\frac{y}{A}\right)$	4
4)	$\operatorname{Prob}\{X \leq C\} = 1$	1
5)	$\operatorname{Prob}\{Y = B\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	1

QUESITO 3 (6 punti) MIN 6 punti sommando il quesito 2 e il quesito 3

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)	41% 32.4% 25%	6

QUESITO 4 (6 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)	Poiché il processo è ergodico, è possibile calcolare le sue statistiche di insieme mediante le statistiche temporali di una qualsiasi realizzazione. $\text{Valor medio} = \frac{1}{2} \quad \text{Potenza media} = \frac{1}{2}$	2
2)	$f_Y(y, t) = \begin{cases} \Pi\left(\frac{a}{1/2}\right) & \text{se } \exists k \text{ tale che } t \in [2k, 2k+1] \\ \delta(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$	2
3)	$E\{y, t\} = \begin{cases} 0.5 & \text{se } \exists k \text{ tale che } t \in [2k, 2k+1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	2
4)	NO	2

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 16 punti - Consegnare tutti i fogli utilizzati

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 6 - 19 giugno 2006

Quesito 1: Segnali determinati

Lo spettro di un segnale $s(t)$ è dato da:

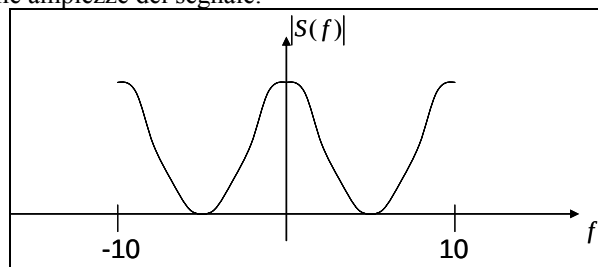
$$S(f) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi 0.2 f) & |f| \leq 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- 1) Disegnare lo spettro delle ampiezze del segnale
- 2) Calcolare il segnale $s(t)$
- 3) Calcolare la media di $s(t)$

SOLUZIONE

$S(f)$ può essere scritto come: $S(f) = \Pi\left(\frac{f}{20}\right) + \Pi\left(\frac{f}{20}\right)\cos(\pi 0.2 f)$. Il coseno ha un periodo $T_0 = 1/0.1 = 10$ sulle frequenze.

- 1) Disegnare lo spettro delle ampiezze del segnale.



- 2) Indicando con $T = 0.1$ il periodo del segnale nell'intervallo della sua attività in frequenza, si ha:

$$S(f) = [1 + \cos(\pi f T)] \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2/T}\right)$$

$$s(t) = \left[\delta(t) + \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) \right] * \frac{2}{T} \frac{\sin \pi \frac{2}{T}}{\pi / \frac{2}{T}} =$$

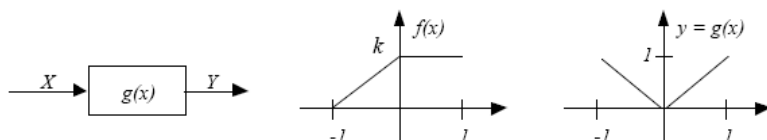
$$= \frac{2}{T} \left[\frac{\sin \pi \frac{2}{T}}{\pi \frac{2}{T}} + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi \left(t - \frac{T}{2}\right) \frac{2}{T}}{\pi \left(t - \frac{T}{2}\right) \frac{2}{T}} + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi \left(t + \frac{T}{2}\right) \frac{2}{T}}{\pi \left(t + \frac{T}{2}\right) \frac{2}{T}} \right]$$

$$s(t) = 20 \text{sinc}(20t) + 10 \text{sinc}[20(t - 0.05)] + 10 \text{sinc}[20(t + 0.05)]$$

- 3) Calcolare la media di $s(t)$

Dato che lo spettro del segnale non ha impulsi nell'origine, il segnale è a media $\langle m(t) \rangle = 0$

Quesito 2a: Teoria della probabilità e variabili aleatorie



Sia data la variabile casuale X con funzione di densità di probabilità $f(x)$ definita in figura. Calcolare:

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 1) la densità di probabilità della variabile Y in uscita dal blocco $y = g(x)$
- 2) il suo valor medio

SOLUZIONE

Osservando la forma di $f(x)$ si osserva che la condizione di area unitaria è verificata se e solo se

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{k}{2} + k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{3}$$

D'altro canto, la funzione $g(x)$ è invertibile a tratti. Considerando prima la parte degli x negativi

$$y = -x \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{dx}{dy} \right| = 1$$

Perciò

$$f(y) = f(g^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| = k(-y + 1) \quad x < 0$$

Nel caso di x positivi, si ha

$$y = x \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{dx}{dy} \right| = 1$$

Perciò

$$f(y) = f(g^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| = k \quad x \geq 0$$

Dunque $f(y)$ è la sovrapposizione di questi due tratti (ambedue i rami di $y = g(x)$ danno in uscita y positivi e compresi tra 0 e 1).

$$f(y) = k(-y + 1) + k = -yk + 2k = -\frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \quad 0 \leq y \leq 1$$

Un rapido calcolo assicura che

$$\int_0^1 f(y) dy = \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \right) dy = -\frac{2}{3} \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 1$$

Per il calcolo del valor medio si deve risolvere l'integrale

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \int y f(y) dy = \int_0^1 y \left(-\frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \right) dy \\ &= \left. -\frac{2}{3} \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3} \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = -\frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Quesito 2b: Processi aleatori

[Solo per i 9 crediti]

Dato il processo aleatorio parametrico $X(t; A) = A[u(t) + u(-t)]$, con A variabile aleatoria normale standard.

- 1) Disegnare alcune possibili realizzazioni

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 2) Calcolare la media statistica $E_A\{X(t)\}$
- 3) Calcolare la varianza statistica $\text{var}_A\{X(t)\}$
- 4) Calcolare la funzione di autocorrelazione $R_{xx}(t_1, t_2)$
- 5) Dire se il processo è stazionario, motivandone la risposta
- 6) Dire se il processo è ergodico, motivandone la risposta

SOLUZIONE

- 1) Notiamo che ogni realizzazione è un segnale costante di ampiezza pari al valore della variabile aleatoria A .
- 2) La media statistica in qualunque istante è dunque pari alla media della variabile aleatoria, cioè: $E_A\{X(t)\} = 0$
- 3) La varianza statistica in qualunque istante è dunque pari alla varianza della variabile aleatoria, cioè: $\text{var}_A\{X(t)\} = 1$
- 4) La funzione di autocorrelazione $R_{xx}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X^2\} = E\{X^2\} + \sigma_x^2 = 1$
- 5) Il processo è stazionario in senso lato, dato che la funzione di autocorrelazione e il valor medio sono costanti nel tempo.
- 6) Il processo non è ergodico, dato che ogni realizzazione ha una diversa media temporale.

Quesito 3a

Progettare un sistema FM che abbia un rapporto segnale/rumore all'uscita del demodulatore pari ad almeno 40 dB, e che richieda la minima potenza trasmessa. La banda disponibile sul canale è pari a 100 kHz, mentre la banda del segnale modulante è pari a 10 kHz. La potenza normalizzata del segnale modulante vale $P_m = \langle m^2(t) \rangle / V_p^2 = 0.5$, e la densità spettrale di rumore all'ingresso del ricevitore è pari a $N_0/2 = 5 \cdot 10^{-9}$ W/Hz.

Che potenza è necessario avere all'ingresso del ricevitore?

Svolgimento: Il rapporto segnale/rumore all'uscita di un demodulatore FM ideale è dato da:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{3P_{RX}\beta_f^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle}{N_0 B}$$

Risolvendo rispetto alla potenza ricevuta si ottiene:

$$P_{RX} = \frac{N_0 B}{3\beta_f^2 \left\langle \left(\frac{m(t)}{V_p}\right)^2 \right\rangle} \left(\frac{S}{N}\right)_{out}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Il parametro β_f che compare nella formula deve essere massimizzato (per massimizzare il rapporto segnale/rumore in ricezione) compatibilmente con i limiti di banda complessiva a disposizione per cui:

$$B_T = 2(\beta_f + 1)B$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\beta_f &= \frac{B_T}{2B} - 1 \\ &= \frac{100 \text{ kHz}}{2 \cdot 10 \text{ kHz}} - 1 \\ &= 4\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici nella formula della potenza ricevuta si ottiene:

$$\begin{aligned}P_{RX} &= \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} \cdot 10^4 \text{ Hz}}{3 \cdot 4 \cdot 0.5} \cdot 10^4 \\ &= 4.16 \cdot 10^{-2} \text{ W}\end{aligned}$$

Quesito 3b	
-------------------	--

Sia dato il segnale $m(t) = 3 \cos(2\pi f_m t)$, modulato con una portante di ampiezza $A_c = 5$. Calcolare:

- 1) la frequenza portante, f_c , e la massima frequenza f_m , tale che il segnale modulato FM con sensibilità di frequenza $D_f = 4\pi f_m$ passi inalterato (senza perdita di potenza) attraverso un canale ideale passa-banda tra 3 e 14 MHz.
- 2) L'ampiezza di banda nella quale è contenuto il 98% della potenza complessiva, nel caso in cui si utilizzi la massima frequenza f_m calcolata al punto precedente.

SOLUZIONE:

1. Dato che $D_f = 4\pi f_m$, si ha che $\beta_f = \frac{D_f A_m}{2\pi f_m} = \frac{4\pi f_m \cdot 3}{2\pi f_m} = 6$. Allora la banda occupata dal segnale modulato FM, dalla regola di Carson, è $B_{FM} = 2(\beta_f + 1) \cdot f_m$. Quindi, dalla relazione $B_{FM} \leq B_{Canale}$ abbiamo che:
 $f_c = 8.5 \text{ MHz}$ e $f_{m,MAX} = \frac{B_{Canale}}{2 \cdot (6+1)} = 785 \text{ kHz}$.
2. La banda cercata è la banda di Carson: $B_{Carson} = 2(\beta + 1)B = 2(\beta + 1)f_m = 11 \text{ MHz}$.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (7 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		3
3)		2

QUESITO 2a (4 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		3
2)		1

QUESITO 2b (9 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		1
2)		2
3)		2
4)		2
5)		1
6)		1

QUESITO 3a (5 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		5

QUESITO 3b (5 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		3
		2

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 7 - 03 luglio 2006

Quesito 1: Segnali determinati

Si consideri un filtro con funzione di trasferimento pari a $H(f) = \frac{1 - j2\pi f}{1 + j2\pi f}$. Se all'ingresso del filtro viene applicato un

impulso rettangolare di ampiezza A e durata T , centrato nell'origine, calcolare:

- 1) la densità spettrale di energia e l'energia del segnale d'ingresso
- 2) la densità spettrale di energia e l'energia del segnale d'uscita

Se invece in ingresso poniamo lo stesso impulso rettangolare replicato con frequenza di replica pari a $T_0 = 4T$, calcolare:

- 3) la densità spettrale di potenza e la potenza del segnale d'ingresso
- 4) la densità spettrale di potenza e la potenza del segnale d'uscita

SOLUZIONE

- 1) Il segnale d'ingresso è: $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$. Quindi la sua DSE è: $\mathcal{E}_m(f) = |X(f)|^2 = |AT \operatorname{sinc}(Tf)|^2$.

L'energia è: $E = A^2T$.

- 2) Notiamo che $|H(f)|^2 = 1$. Per cui la DSE in uscita è: $\mathcal{E}_{out}(f) = \mathcal{E}_m(f)$, e l'energia $E_{out} = E_{in} = A^2T$

- 3) L'espressione del segnale stavolta è: $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$. Lo spettro è: $Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(t - nF_0)$, dove:

$$F_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{4T} \quad c_n = F_0 X(nF_0) = \frac{1}{4T} AT \operatorname{sinc}\left(\frac{Tn}{4T}\right) \rightarrow c_n = \frac{A}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$\text{Quindi la DSP è: } \mathcal{P}_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n)^2 \delta(t - nF_0) \rightarrow \mathcal{P}_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right) \delta(t - nF_0).$$

$$\text{La potenza è: } P = \frac{1}{4T} A^2T = \frac{A^2}{4}$$

- 4) DSP e potenza in uscita coincidono con quelle in ingresso, per quanto detto al punto 2.

Quesito 2a: Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Un giocatore ha inizialmente 10 monete. Scommette sul lancio di un dado regolare: se esce un numero pari vince una moneta, se esce un numero dispari perde una moneta. Data la variabile aleatoria "numero di monete del giocatore dopo 8 lanci del dado":

- 1) descrivere il suo spazio campione
- 2) la sua funzione di densità delle probabilità
- 3) la sua funzione di distribuzione cumulativa di probabilità
- 4) il suo valore medio
- 5) la probabilità che dopo 8 lanci il giocatore abbia 10 monete

SOLUZIONE

- 1) descrivere il suo spazio campione

Lo spazio campione è dato dall'intervallo tra i due casi estremi (perde sempre) (vince sempre). Dunque è: $\{2, 3, \dots, 18\}$

- 2) la sua funzione di densità delle probabilità

$$f_{M_8}(m) = \operatorname{Prob}\{M_8 = m\} = \operatorname{Prob}\left\{h \text{ successi e } k \text{ insuccessi, con } \begin{cases} h - k = m - 10 \\ h, k \in [0, \dots, 8] \end{cases}\right\}$$

Per calcolarla, notiamo scriviamo una tabella con i possibili successi (S) e insuccessi (I), e con il numero di monete finali:

S	I	Monete finali	Probabilità
8	0	18	$B_{8,8}(p = 0.5, q = 0.5) = 3.9063e-003$
7	1	16	$B_{7,8}(p = 0.5, q = 0.5) = 3.1250e-002$
6	2	14	$B_{6,8}(p = 0.5, q = 0.5) = 1.0938e-001$
5	3	12	$B_{5,8}(p = 0.5, q = 0.5) = 2.1875e-001$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

4	4	10	$B_{4,8}(p=0.5, q=0.5)=2.7344e-001$
3	5	8	$B_{3,8}(p=0.5, q=0.5)=2.1875e-001$
2	6	6	$B_{2,8}(p=0.5, q=0.5)=1.0938e-001$
1	7	4	$B_{1,8}(p=0.5, q=0.5)=3.1250e-002$
0	8	2	$B_{0,8}(p=0.5, q=0.5)=3.9063e-003$

Dunque:
$$f_{M_8}(m) = B_{8,8}\delta(m-18) + B_{7,1}\delta(m-16) + B_{6,2}\delta(m-14) + B_{5,3}\delta(m-12) + B_{4,4}\delta(m-10) + B_{3,5}\delta(m-8) + B_{2,6}\delta(m-6) + B_{1,7}\delta(m-4) + B_{0,8}\delta(m-2)$$

3) la sua funzione di distribuzione cumulativa di probabilità

$$F_{M_8}(m) = B_{8,8}u(m-18) + B_{7,1}u(m-16) + B_{6,2}u(m-14) + B_{5,3}u(m-12) + B_{4,4}u(m-10) + B_{3,5}u(m-8) + B_{2,6}u(m-6) + B_{1,7}u(m-4) + B_{0,8}u(m-2)$$

4) il suo valore medio è 10, data la simmetria della pdf

5) la probabilità che dopo 8 lanci il giocatore abbia 10 monete è $B_{4,8}(p=0.5, q=0.5)=2.7344e-001$

Quesito 2b: Processi aleatori

Un rumore $n(t)$ stazionario, con densità di probabilità delle ampiezze di tipo gaussiano e spettro di potenza $G_n(f) = |k f| + 3\delta(f)$ passa attraverso un filtro con $H(f) = 0.5$ negli intervalli $(-f_2, -f_1)$ e (f_1, f_2) , e 0 altrove. Calcolare:

- 1) lo spettro di potenza del rumore all'uscita del filtro
- 2) la potenza del rumore all'uscita del filtro

SOLUZIONE

$$G_u(f) = G_n(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{1}{4} k f \Pi\left(\frac{f - \frac{f_1 + f_2}{2}}{f_2 - f_1}\right) - \frac{1}{4} k f \Pi\left(\frac{f + \frac{f_1 + f_2}{2}}{f_2 - f_1}\right)$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} G_u(f) df = 2 \int_{f_1}^{f_2} |k f| \cdot 0.5^2 df = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \int_{f_1}^{f_2} f \cdot df = (f_2^2 - f_1^2) \cdot k \cdot \frac{1}{4}$$

Quesito 3

Si supponga di voler trasmettere alcune segnali del tipo $m(t) = 3\cos(70000\pi t + 120) + 1$ nell'intervallo di frequenze [400-650] kHz in *multiplazione* di frequenza, con un'ampiezza della portante pari ad $A_c = 10$. Si vuole utilizzare un canale caratterizzato da un rumore Gaussiano bianco con DSP pari a 0.001.

- 1) Quanti canali si possono trasmettere con modulazione AM? Quali sono le frequenze delle portanti del primo e dell'ultimo canale? Qual è la potenza complessiva di trasmissione?
- 2) Quanti canali si possono trasmettere con modulazione AM-USSB? Quali sono le frequenze delle portanti del primo e dell'ultimo canale? Qual è la potenza complessiva di trasmissione?
- 3) Quanti canali si possono trasmettere con modulazione FM, con $\beta_f = 2$? Quali sono le frequenze delle portanti del primo e dell'ultimo canale? Qual è la potenza complessiva di trasmissione?
- 4) Qual è il massimo valore dell'indice di modulazione di fase affinché si possano trasmettere in modulazione PM lo stesso numero di canali della modulazione AM? Qual è il rapporto S/N all'uscita del demodulatore?

SOLUZIONE

La banda disponibile è: $B_{tot} = 250$ kHz. Il segnale modulante ha banda $B = 35$ kHz, picco $V_p = 4$ V. Il rumore ha una DSP data da $DSP(f) = 20/2$, cioè da $N_0 = 0.002$.

- 1) Quanti canali si possono trasmettere con modulazione AM? Quali sono le frequenze delle portanti del primo e dell'ultimo canale? Qual è la potenza complessiva di trasmissione?

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

In questo caso $B_{Can} = 70$ kHz. Quindi il numero di canali è: $N_{AM} = \left\lfloor \frac{B_{TOT}}{B_{Can}} \right\rfloor = 3$.

$$f_{c1} = 400 + \frac{B_{Can}}{2} = 435 \text{ kHz.} \quad f_{cN} = 650 - \frac{B_{Can}}{2} = 615 \text{ kHz.}$$

$$P_{TOT} = N \cdot \left(\frac{1}{2} A_c^2 + A_c^2 \langle m(t) \rangle + \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle \right) = 3 \cdot \left(50 + 100 \cdot 1 + 50 \cdot \left(\frac{9}{2} + 1 \right) \right) = 3(150 + 275) = 1275$$

- 2) Quanti canali si possono trasmettere con modulazione AM-USSB? Quali sono le frequenze delle portanti? Qual è la potenza complessiva di trasmissione?

In questo caso $B_{Can} = 35$ kHz. Quindi il numero di canali è: $N_{AM-USSB} = \left\lfloor \frac{B_{TOT}}{B_{Can}} \right\rfloor = 7$.

$$f_{c1} = 400 \text{ kHz.} \quad f_{cN} = 650 - B_{Can} = 615 \text{ kHz.}$$

$$P_{TOT} = N \cdot \left(A_c^2 \langle m^2(t) \rangle \right) = 7 \cdot \left(100 \cdot \left(\frac{9}{2} + 1 \right) \right) = 3850$$

- 3) Quanti canali si possono trasmettere con modulazione FM, con $\beta_f = 2$? Quali sono le frequenze delle portanti? Qual è la potenza complessiva di trasmissione?

In questo caso $B_{Can} = 2(\beta_{FM} + 1)B = 210$ kHz. Quindi il numero di canali è: $N_{FM} = \left\lfloor \frac{B_{TOT}}{B_{Can}} \right\rfloor = 1$.

Dato che abbiamo un solo canale, lo posizioniamo al centro della banda disponibile: $f_{c1} = \frac{400 + 650}{2} = 525 \text{ kHz.}$

$$P_{TOT} = \frac{A_c^2}{2} = 50$$

- 4) Qual è il massimo valore dell'indice di modulazione di fase affinché si possano trasmettere in modulazione PM lo stesso numero di canali della modulazione AM? Qual è il rapporto S/N all'uscita del demodulatore?

Dobbiamo imporre che $N_{AM} = N_{PM}$, da cui:

$$B_{Can} = \frac{B_{TOT}}{3} = 83.33. \text{ Ricordando che } B_{Can} = 2(\beta_{PM} + 1)B, \text{ si ha: } \beta_{PM} = \frac{B_{Can}}{2B} - 1 = \frac{83.33}{70} - 1 = 0.19$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{A_c^2 P_m \beta_p^2 / V_p^2}{2 N_0 B} = \frac{100 \cdot \frac{11}{2} \cdot 0.0362811 / 16}{2 \cdot 0.002 \cdot (35 \cdot 10^3)} = 8.9 \cdot 10^{-3} = -20.5 \text{ dB}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (7 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		2
3)		2
4)		1

QUESITO 2a (9 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		3
3)		1
4)		2
5)		1

QUESITO 2b (4 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		2

QUESITO 3 (10 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		3
2)		2
3)		2
4)		2

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 8 - 17 luglio 2006

Quesito 1: Segnali determinati

Dato un segnale $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-3k)$, dove $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$, calcolare:

- 1) il periodo del segnale $y(t)$
- 2) l'energia del segnale $y(t)$
- 3) la componente di terza armonica
- 4) la potenza all'uscita di un filtro a coseno rialzato con $f_0 = \frac{4}{3}$ ed $r = \frac{1}{8}$.

SOLUZIONE

- 1) il periodo del segnale $y(t)$ è $T_0 = 3$
- 2) l'energia del segnale $y(t)$ è infinita, dato che il segnale è periodico
- 3) dato che $X(f) = 4 \operatorname{sinc}(4f)$ e la frequenza di replica è dato che $F_0 = \frac{1}{3}$, i coefficienti sono

$$c_n = \frac{4}{3} \operatorname{sinc}(4nF_0) = \frac{4}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{4}{3}n\right).$$

La componente di terza armonica è $c_3 = 4 \cdot F_0 X(3F_0) = \frac{4}{3} X(1) = 0$

- 4) Il filtro a cos rialzato lascia passare solo le prime 3 armoniche e la componente in continua. La quarta armonica la attenua di $\frac{1}{2}$. Quindi il segnale in uscita ha coefficienti di Fourier dati da:

$$c_0 = \frac{4}{3} \operatorname{sinc}(0) = \frac{1}{3} \quad c_{+1} = c_{-1} = \frac{4}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{4}{3}\right) = -0.2757 \quad c_{+2} = c_{-2} = \frac{4}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{8}{3}\right) = 0.1378 \quad c_{+3} = c_{-3} = \frac{4}{3} \operatorname{sinc}(4) = 0$$

$$c_{+4} = c_{-4} = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} \operatorname{sinc}(4) \right] = \frac{2}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{16}{3}\right) = -0.0345 \dots$$

Quindi, tenendo conto che la quarta armonica viene dimezzata dal coseno rialzato, dato che cade in corrispondenza della sua frequenza a -6dB , la potenza è: $P = 1.8740$

Quesito 2a: Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Si considerino i due eventi casuali:

- A: avere figli di entrambi i sessi
 - B: avere al massimo un figlio maschio
- 1) Calcolare la $P(A)$ nel caso in cui si abbiano 2 figli
 - 2) Calcolare la $P(B)$ nel caso in cui si abbiano 2 figli
 - 3) Dire se A e B sono statisticamente indipendenti nel caso in cui si abbiano 2 figli
 - 4) Calcolare la $P(A)$ nel caso in cui si abbiano 3 figli
 - 5) Calcolare la $P(B)$ nel caso in cui si abbiano 3 figli
 - 6) Dire se A e B sono statisticamente indipendenti nel caso in cui si abbiano 3 figli

SOLUZIONE

NEL CASO SI ABBIANO 2 FIGLI lo spazio campione è: $S = \{MM, MF, FM, FF\}$

- 1) Calcolare la $P(A)$ nel caso in cui si abbiano 2 figli è $\frac{1}{2}$
- 2) Calcolare la $P(B)$ nel caso in cui si abbiano 2 figli è $\frac{3}{4}$
- 3) Dire se A e B sono statisticamente indipendenti nel caso in cui si abbiano 2 figli

Per vedere se sono indipendenti calcoliamo la probabilità congiunta: $P(A,B) = 1/2$. Dato che $P(A,B) \neq P(A) \cdot P(B)$, gli eventi non sono statisticamente dipendenti.

NEL CASO SI ABBIANO 3 FIGLI lo spazio campione è: $S = \{MMM, MMF, MFM, MFF, FMM, FMF, FFM, FFF\}$

- 4) Calcolare la $P(A)$ nel caso in cui si abbiano 3 figli è $\frac{3}{4}$
- 5) Calcolare la $P(B)$ nel caso in cui si abbiano 3 figli è $\frac{1}{2}$
- 6) Dire se A e B sono statisticamente indipendenti nel caso in cui si abbiano 2 figli

Per vedere se sono indipendenti calcoliamo la probabilità congiunta: $P(A,B) = 3/8$. Dato che $P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$, gli eventi sono statisticamente indipendenti.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Quesito 2b: Processi aleatori

Dato il processo aleatorio $X(t; \Omega) = \Omega \cdot \Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)$, dove Ω è il risultato dell'esperimento aleatorio lancio di un dado.

Calcolare:

- 1) la media statistica del processo aleatorio;
- 2) la media temporale di una realizzazione scelta a caso
- 3) la funzione di autocorrelazione statistica del processo
- 4) Dire se il processo è stazionario, giustificando la risposta

SOLUZIONE

- 1) la media statistica del processo aleatorio è: $\eta_x(t) = \begin{cases} 3.5 & 0 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

- 2) la media temporale di una realizzazione scelta a caso

La media temporale di una qualunque realizzazione è 0, dato che ogni realizzazione è un impulso rettangolare, limitato nel tempo, e quindi a media nulla

- 3) la funzione di autocorrelazione statistica del processo

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \begin{cases} E\{\Omega^2\} = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6} = 15.167 & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 6 \text{ e } 0 \leq t_2 \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- 4) Dire se il processo è stazionario, giustificando la risposta

Il processo non è stazionario perché sia media che funzione di autocorrelazione dipendono dal tempo

Quesito 3

Sia dato il segnale $m(t) = 12 \cdot \cos(2\pi 300 t)$. Esso viene modulato FM utilizzando un tono a frequenza $f_c = 24$ kHz. Il segnale così ottenuto viene filtrato attraverso un filtro ideale passa-banda a frequenza centrale f_c e larghezza di banda $B = 2$ kHz. Sia G il guadagno di tale filtro.

Nell'ipotesi in cui si voglia una deviazione di frequenza di picco pari a $\Delta F = 600$ Hz:

- 1) si calcoli e si disegni lo spettro del segnale all'ingresso del filtro
- 2) si calcoli e si disegni lo spettro del segnale all'uscita del filtro
- 3) si determini inoltre il valore di G affinché la potenza del segnale all'uscita del filtro, P_{OUT} , sia uguale alla potenza del segnale all'ingresso del filtro, P_{IN} .

SOLUZIONE:

Il segnale modulato sarà $s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + D_f \int_{-\infty}^t m(\sigma) d\sigma\right)$ essendo $D_f = \frac{2\pi V_p}{\Delta F}$, dove ΔF è la deviazione di

frequenza di picco. E' inoltre noto che per un segnale sinusoidale si ha $\Delta F = f_m \beta$, essendo β l'indice di modulazione.

Nel nostro caso risulta $\beta = 600/300 = 2$, per cui dalle tabelle delle funzioni di Bessel si ha:

- $J_0(2) = 0.2239$
- $J_1(2) = 0.5767$
- $J_2(2) = 0.3528$
- $J_3(2) = 0.1289$
- $J_4(2) = 0.034$
- $J_5(2) = 0.007$
- $J_6(2) = 0.0012$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

E' quindi possibile disegnare lo spettro delle ampiezze di x_m per frequenze positive che ha uno spettro a righe con ampiezza delle delta pari ai coefficienti di Bessel, moltiplicati per A_c

2) La banda del segnale è $B_{FM} = 2(\beta + 1)f_m = 1800$ Hz. Quindi il segnale passa inalterato, ma amplificato di G .

Quindi lo spettro è uguale a quello di ingresso, ma moltiplicato per G .

Il valore di G richiesto è dunque $G = 1$.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (7 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		1
2)		1
3)		2
4)		3

QUESITO 2a (8 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		1
2)		1
3)		2
4)		1
5)		1
6)		2

QUESITO 2b (5 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		1
2)		1
3)		2
4)		1

QUESITO 3 (10 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		3
2)		4
3)		3

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti

COMPITO 9 - 04 settembre 2006

Quesito 1: Segnali determinati

Dato il segnale il cui spettro è $S(f) = A \cdot \Pi\left(\frac{f}{1000}\right)$, lo si campioni con passo $T_c = 1$ ms, e si ricostruisca poi un segnale analogico $s'(t)$ interpolando il segnale campionato con i filtri aventi le seguenti risposte all'impulso: a) $h(t) = \text{sinc}(t/T_c)$; b) $h(t) = \Lambda(t/T_c)$; c) $h(t) = \frac{1}{2}\Lambda(t/2T_c)$

- 1) Calcolare l'espressione dello spettro di $s'(t)$ nel caso a);
- 2) Calcolare l'espressione dello spettro di $s'(t)$ nel caso b);
- 3) Calcolare l'espressione dello spettro di $s'(t)$ nel caso c);
- 4) Mettere in ordine, dal migliore al peggiore, i filtri interpolatori
- 5) Calcolare l'energia e la potenza di $s'(t)$ nel caso a);

SOLUZIONE

- 1) Calcolare l'espressione dello spettro di $s'(t)$ nel caso a);

Nel caso a) $h(t) = \text{sinc}(t/T_c) \rightarrow H(f) = \frac{1}{F_c} \Pi\left(\frac{f}{F_c}\right) \rightarrow$

$$S'(f) = H(f) \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - k/T_c) = A \cdot H(f) \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f - k/T_c}{1000}\right) = A \cdot \frac{1}{F_c} \Pi\left(\frac{f}{F_c}\right) \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f - k/T_c}{1000}\right) =$$

$$S'(f) = A \cdot \Pi\left(\frac{f}{1000}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f - k/T_c}{1000}\right) = A \cdot \Pi\left(\frac{f}{1000}\right) \rightarrow \boxed{S'(f) \equiv S(f)}$$

- 2) Calcolare l'espressione dello spettro di $s'(t)$ nel caso b);

Nel caso b) $h(t) = \Lambda(t/T_c) \rightarrow H(f) = \frac{1}{F_c} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{F_c}\right) \rightarrow$

$$S'(f) = H(f) \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - k/T_c) = A \cdot \frac{1}{F_c} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{F_c}\right) \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f - k/T_c}{1000}\right) =$$

$$\boxed{S'(f) = A \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{f}{F_c}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f - k/T_c}{1000}\right)}$$

- 3) Calcolare l'espressione dello spettro di $s'(t)$ nel caso c);

Nel caso c) $h(t) = \frac{1}{2}\Lambda(t/2T_c) \rightarrow H(f) = \frac{1}{F_c} \text{sinc}^2\left(2\frac{f}{F_c}\right) \rightarrow$

$$S'(f) = \frac{1}{2} A \cdot \frac{2}{F_c} \text{sinc}^2\left(2\frac{f}{F_c}\right) \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f - k/T_c}{1000}\right) =$$

$$\boxed{S'(f) = A \cdot \text{sinc}^2\left(2\frac{f}{F_c}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f - k/T_c}{1000}\right)}$$

- 4) Mettere in ordine, dal migliore al peggiore, i filtri interpolatori

Caso a), caso b), caso c)

- 5) Calcolare l'energia e la potenza di $s'(t)$ nel caso a);

L'energia è $E = 1000 \cdot A^2$; la potenza è $P = \infty$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Quesito 2a: Teoria della probabilità

In un sacchetto vi sono 10 palline bianche; quante palline nere devo mettere nel sacchetto affinché la probabilità di estrarre due palline nere su due estrazioni consecutive e senza reinserimento sia maggiore di $\frac{1}{2}$?

SOLUZIONE

Indichiamo con x la nostra incognita, cioè il numero di palline nere da inserire nel sacchetto. La probabilità di estrarre due palline nere è $P(N_1, N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1)$, dove:

- $P(N_1)$ è la probabilità di estrarre una pallina nera alla prima estrazione, cioè: $P(N_1) = \frac{x}{10+x}$
- $P(N_2|N_1)$ è la probabilità di estrarre una pallina nera alla seconda estrazione, dato per certo che alla prima sia stata estratta una pallina nera, cioè: $P(N_2|N_1) = \frac{x-1}{10+x-1}$

Dobbiamo imporre che $P(N_1, N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) > \frac{1}{2}$. Quindi abbiamo:

$$P(N_1, N_2) = \frac{x}{10+x} \cdot \frac{x-1}{10+x-1} > \frac{1}{2} \rightarrow 2x^2 - 2x > x^2 + 9x + 10x + 90 \rightarrow x^2 - 21x - 90 > 0, \text{ la cui soluzioni è:}$$

$x < -3.65$ e $x > 24.65$. Tenendo conto che x deve essere un intero positivo, il risultato è che dobbiamo inserire almeno 25 palline nere.

Quesito 2b: Variabili aleatorie

Si consideri la variabile aleatoria x ottenuta dalla seguente trasformazione: $x = 7 + p + u$, ove:

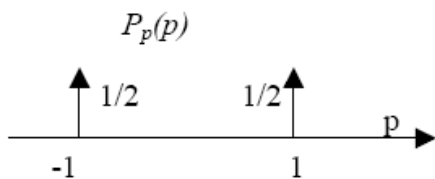
- p è una variabile aleatoria discreta che può assumere i valori $+1$ e -1 con eguale probabilità;
- u è una variabile aleatoria, indipendente da p , uniformemente distribuita nell'intervallo $[10, 11]$.

Determinare:

- 1) La funzione densità di probabilità (pdf) di p (espressione analitica e grafico);
- 2) Il valor medio e la varianza di p ;
- 3) La funzione densità di probabilità di u (espressione analitica e grafico);
- 4) Il valor medio e la varianza di u ;
- 5) Il valor medio e la varianza di x ;
- 6) La funzione densità di probabilità di x (espressione analitica e grafico);
[SUGG. 1: calcolare prima la pdf della v.a. $(7+u)$]
[SUGG. 2: la pdf della somma di due v.a. indipendenti è uguale alla convoluzione delle pdf delle due v.a.]
- 7) Il valore medio e la varianza della variabile aleatoria $y = 2x$
- 8) Il funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $y = 2x$ (espressione analitica e grafico).

Soluzione

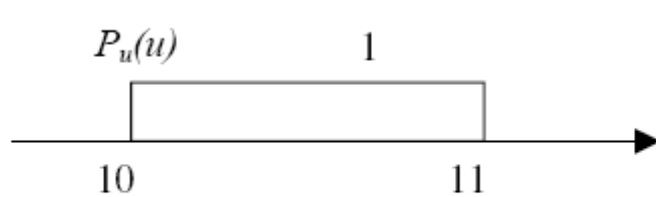
Dapprima rappresentiamo graficamente le d.d.p. di p e di u e calcoliamone i momenti statistici del primo e del secondo ordine.



$$\begin{cases} M = \left(-1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0 \\ VQM = \sigma_p^2 = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1)^2 = 1 \end{cases}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

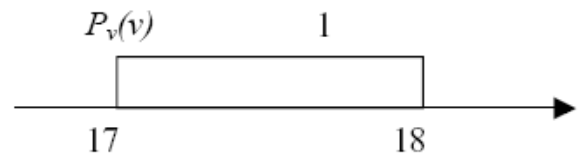
Prof. Giovanni Schembra



$$\begin{cases} M = \frac{10+11}{2} = 21/2 \\ \sigma_u^2 = \frac{(11-10)^2}{12} = 1/12 \\ VQM = M^2 + \sigma_u^2 = 331/3 \end{cases}$$

Poniamo ora $v = 7 + u$ in modo da ottenere una nuova variabile aleatoria caratterizzata dalla seguente d.d.p.:

$$P_v(v) = \text{rect}\left(v - 7 - \frac{21}{2}\right) = \text{rect}\left(v - \frac{35}{2}\right)$$



Ed i cui momenti statistici del primo e secondo ordine sono, rispettivamente:

$$M_v = E[v] = E[7 + u] = 7 + E[u] = \frac{35}{2}$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_u^2$$

$$VQM_v = \frac{919}{3}$$

Si noti che la varianza non cambia in quanto essa non dipende dalla traslazione effettuata.

Si può ora scrivere $x = p + v$, ottenendo, per la d.d.p. di x la seguente formula:

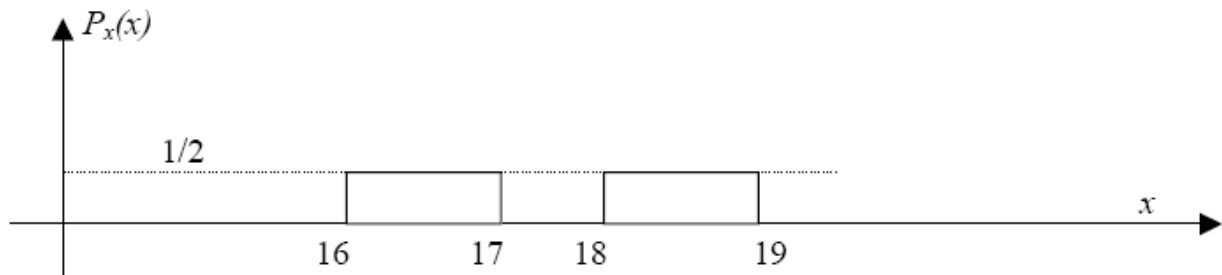
$$P_x(x) = P_p(p) * P_v(v)$$

Ovvero, riscrivendo la convoluzione in x :

$$\begin{aligned} P_x(x) &= P_p(p) * P_v(v) = \text{rect}\left(x - \frac{35}{2}\right) * \left[\frac{1}{2}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x-1)\right] = \text{per le proprietà della Delta di Dirac} \\ &= \frac{1}{2}\text{rect}\left(x - \frac{35}{2} + 1\right) + \frac{1}{2}\text{rect}\left(x - \frac{35}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\text{rect}\left(x - \frac{33}{2}\right) + \text{rect}\left(x - \frac{37}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra



Calcoliamo ora i momenti statistici di x :

$$M_x = E[x] = E[p + v] = E[p] + E[v] = 35/2$$

$$VQM_x = E[x^2] = E[(p + v)^2] = E[p^2] + E[v^2] + 2 \cdot E[p \cdot v] = 922/3$$

$$Var_x = \sigma_x^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = 13/12$$

Infine eseguiamo la trasformazione $y = 2x$, ottenendo una variabile aleatoria caratterizzata dai seguenti momenti:

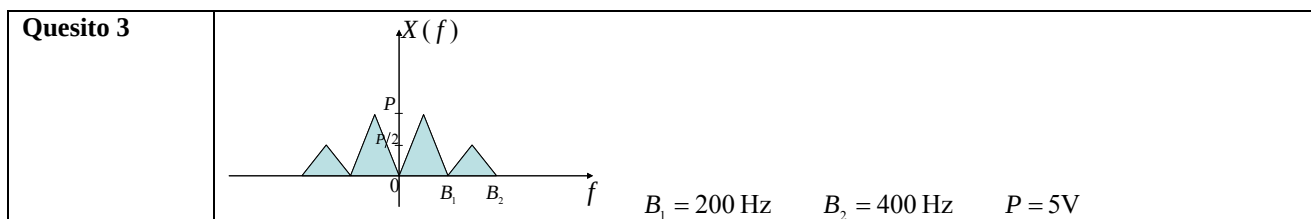
$$E[y] = E[2 \cdot x] = 2 \cdot E[x] = 35$$

$$E[y^2] = E[(2 \cdot x)^2] = 4E[x^2] = 3688/3$$

$$\sigma_y^2 = E[y^2] - (E[y])^2 = 13/3$$

e descritta dalla seguente d.d.p.:

$$P_y(y) = \frac{1}{2} P_x\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{4} [rect_2(y - 33) + rect_2(y - 37)]$$



Si vuole trasmettere senza ISI su un canale con banda passante $B_c = 400$ Hz, probabilità di errore sul bit di 10^{-4} , e un rapporto S/N di canale di 3 (in scala lineare), una sequenza di bit generata da una sorgente binaria costituita da un codificatore PCM applicato al segnale analogico il cui spettro è illustrato in figura. Calcolare:

- 1) la minima frequenza di campionamento per poter ricostruire il segnale a destinazione con il filtro

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{400}\right) + \Pi\left(\frac{f - 350}{100}\right) \cdot \Lambda\left(\frac{f - 400}{100}\right)$$

- 2) I primi 2 campioni a partire dall'istante $t = 0$ ottenuti con la frequenza di campionamento calcolata al punto 1)
- 3) Il numero di bit necessari per codificare il segnale in PCM in modo da avere un S/N di picco di codifica non inferiore a 13 dB.
- 4) Supponendo di applicare una codifica di canale NRZ polare, e di formattare gli impulsi a sinc, determinare, giustificando la risposta, se è possibile effettuare la trasmissione sul canale, eventualmente effettuando una codifica multilivello.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

SOLUZIONE

- 1) Il filtro $H(f)$ occupa una banda totale di $f_H = 500$ Hz, e ha una banda lineare di $f_L = 400$ Hz. Dato che il segnale occupa una banda $B_2 = 400$, lo si può usare. Tuttavia, nel campionare il segnale dobbiamo fare in modo che la seconda replica parta almeno da $f_H = 500$ Hz. Dunque dobbiamo scegliere una banda di guardia pari a $B_G = 100$ Hz. Così la minima frequenza di campionamento da utilizzare sarà: $f_s = 2B_2 + B_G = 900$ Hz.

- 2) Calcoliamo prima il segnale avente lo spettro quello indicato in figura.

$$\text{Abbiamo: } x(t) = P \operatorname{sinc}^2\left(\frac{B_1}{2}t\right) \cdot 2 \cos\left(2\pi \frac{B_1}{2}t\right) + \frac{P}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{B_2 - B_1}{2}t\right) \cdot 2 \cos\left(2\pi \frac{B_1 + B_2}{2}t\right)$$

$$\text{Sostituendo, abbiamo: } x(t) = 5 \operatorname{sinc}^2(100t) \cdot 2 \cos(200\pi t) + 2.5 \operatorname{sinc}^2(100t) \cdot 2 \cos(600\pi t)$$

I primi 2 campioni a partire dall'istante $t = 0$ ottenuti con la frequenza di campionamento calcolata al punto 1) saranno allora: $x_1 = 7.5$ e $x_2 = -0.0761$

- 3) Il numero di bit necessari per codificare il segnale in PCM in modo da avere un S/N medio di codifica non inferiore a 13 dB = 19.9526 (in scala lineare) si calcola dalla seguente equazione:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \rightarrow M^2 = \frac{4P_e\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} - \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}}}{4P_e\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} - 3} = 6.8053 \rightarrow \boxed{n = \lceil \log_2 M^2 \rceil = \lceil 1.3833 \rceil = 2}$$

- 4) Supponendo di applicare una codifica di canale NRZ polare, e di formattare gli impulsi a sinc, determinare, giustificando la risposta, se è possibile effettuare la trasmissione sul canale, eventualmente effettuando una codifica multilivello.

La bit rate ottenuta è: $R = n f_s = 2 \cdot 900 = 1800$ kbit/s. Dato che usiamo una NRZ polare con formattazione a sinc,

la banda necessaria è: $B = \frac{R}{2} = 900$ Hz. Il canale dunque causerebbe ISI. Per non avere ISI possiamo utilizzare

una codifica multilivello a $\ell = \left\lceil \frac{B}{B_C} \right\rceil = \left\lceil \frac{900}{400} \right\rceil = 3$ bit. Verifichiamo tuttavia se il canale, con la sua banda e il suo

SNR lo consente. Appliciamo la formula della capacità di Shannon:

$$\boxed{R_{\text{MAX}} = B_C \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) = 400 \log_2(1 + 3) = 800 \text{ kbit/s.}}$$
 Dunque non esiste alcun metodo per poter trasmettere senza

ISI sul canale dato, dato che la capacità di canale è inferiore alla bit-rate del flusso dati da trasmettere.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (10 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		3
2)		3
3)		1
4)		2
5)		1

QUESITO 2a (6 punti) MIN 2 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		6

QUESITO 2b (14 punti) MIN 6 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		1
3)		2
4)		1
5)		2
6)		3
7)		1
8)		2

QUESITO 3 (6 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		1
3)		1
4)		2

Regole per superare il compito: ottenere almeno 15 punti

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 10 - 25 settembre 2006

Quesito 1a: Segnali determinati

Dato il segnale $w(t) = \begin{cases} be^{-(t/a)+1} & t > 0 \\ 0 & t = 0, \text{ con } a > 0 \text{ e } b > 0 : \\ -be^{(t/a)-1} & t < 0 \end{cases}$

- 1) si disegni qualitativamente il suo grafico temporale
- 2) si calcoli lo spettro

SOLUZIONE

6) Per calcolare lo spettro, possiamo scrivere:

Ricordiamo inoltre che:

Traslazione temporale $w(t - T_d)$

$$W(f) e^{-j\omega T_d}$$

Cambiamento di scala $w(at)$

$$\frac{1}{|a|} W\left(\frac{f}{a}\right)$$

Quindi abbiamo:

$$g(t) = h(t) - h(-t)$$

$$h(t) = \begin{cases} be^{-(t/a)+1} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} be^{-(t-a)/a} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \xrightarrow{F} H(f) = ba \frac{1}{1 + j2\pi fa} \cdot e^{-j2\pi fa}$$

$$G(f) = H(f) - H(-f) = ba \frac{1}{1 + j2\pi fa} \cdot e^{-j2\pi fa} - ba \frac{1}{1 - j2\pi fa} \cdot e^{+j2\pi fa} =$$

$$= ba \frac{e^{-j2\pi fa} (1 - j2\pi fa) - e^{j2\pi fa} (1 + j2\pi fa)}{1 + (2\pi fa)^2} = -2jba \frac{\pi fa \cdot \cos(2\pi fa) + \sin(2\pi fa)}{1 + (2\pi fa)^2}$$

Quesito 1b: Segnali determinati

All'ingresso di un sistema lineare si abbia l'ingresso $i(t) = \cos 2\pi t$. Se la risposta all'impulso del sistema è $h(t) = e^{-4t}$ gradino(t), quale sarà l'uscita?

SOLUZIONE

L'uscita $u(t)$ sarà $u(t) = A \cos(2\pi t + \varphi)$; con $A = |H(1)|$, $\varphi = \arg(H(1))$, $H(f) \xrightarrow{F} h(t)$

$$H(f)|_{f=1} = \frac{1}{4 + j2\pi f} \Big|_{f=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 + j\pi}$$

$$|H(1)| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \pi^2}}$$

$$\arg[H(1)] = -\arctg\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Quesito 2a: Teoria della probabilità

Immagina di lanciare tre volte una moneta e considera gli eventi:

A = "si presenta la stessa faccia in tutti e tre i lanci"

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

B = "si presenta Testa in almeno due lanci"

Dimostrare che A, B sono due eventi statisticamente indipendenti.

SOLUZIONE

La nostra tesi è: $p(A/B)=p(A)$ o, indifferentemente, $p(B/A)=p(B)$.

- $p(A/B)=p(\text{"stessa faccia in tutti e 3"}/\text{"testa in almeno 2"})$. Ora, l'ipotesi che esca Testa in almeno 2 lanci ci porta all'insieme universo "ristretto" {TTT, TTC, TCT, CTT} nell'ambito del quale l'evento "stessa faccia in tutti e 3" si verifica nel solo caso TTT. Perciò $p(A/B)=1/4$
- Calcoliamo ora $p(A)$. n° casi possibili=2³=8; n° casi favorevoli=2; quindi $p(A)=2/8=1/4$.

Ma allora $p(A/B)=p(A)=1/4$ e la tesi è dimostrata.

OPPURE:

Dato che $p(A)=2/8=1/4$ $p(B)=1/2$ $p(A,B)=1/8$, e quindi risulta che $p(A,B)=p(A)*p(B)$, allora A e B sono statisticamente indipendenti

Quesito 2b: Teoria della probabilità

Se lancio 10 monete finché vengano almeno 8 "teste" (cioè: annullo il lancio e lo ripeto se non sono uscite almeno 8 "teste"), che probabilità ho di ottenere "testa" su tutte e 10 le monete?

SOLUZIONE

I casi possibili sono tanti quante le sequenze di 10 lanci, 8 almeno dei quali siano "Teste".

Possiamo effettuare una partizione dell'insieme dei casi possibili, distinguendo fra:

- esattamente 8 teste: $\binom{10}{8} = 45$ casi
- esattamente 9 teste: $\binom{10}{9} = 10$ casi
- esattamente 10 teste: 1 caso solo.

Perciò i casi possibili sono in totale 45+10+1=56.

Si ha 1 solo caso favorevole.

La probabilità richiesta è perciò 1/56.

Quesito 2b: Variabili aleatorie

Data la variabile aleatoria Gaussiana $\xi = N(4;2)$, ovvero con media pari a 4 e varianza 4. Calcolare:

- 1) La probabilità $\xi \leq 0$
- 2) La probabilità $\xi \geq 0$
- 3) La funzione densità di probabilità $f_{\eta}(y)$ della variabile aleatoria $\eta = 3 \text{sign}(\xi)$. E' necessario individuare esattamente la funzione $F_{\eta}(y)$ usando i valori numerici (usate le tavole in appendice).
- 4) La funzione distribuzione di probabilità $F_{\eta}(y)$ della variabile aleatoria η .

La funzione $\text{sign}(\xi)$ è definita come segue:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

1) La probabilità $\xi \leq 0$ è

$$\mathcal{L} = P\{x < 0\} = F_x(0) = \int_{-\infty}^0 f_x(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx$$

chiamando $y = (x - \eta)/\sigma$ si ottiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\eta/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \mathbf{G}\left(-\frac{\eta}{\sigma}\right) = 1 - \mathbf{G}\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) = \mathbf{Q}\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \text{erf}\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)$$

Se $\eta = 4$ e $\sigma = 2$, vale $\eta/\sigma = 2$ e, dalle tavole, $\mathcal{L} = \mathbf{Q}(2) = 0.5 - \text{erf}(2) \approx 0.02274$.

2) La probabilità $\xi \geq 0 = 1 - \mathcal{L}$

3) La funzione densità di probabilità è $f_\eta(y) = \mathcal{L}\delta(x+3) + (1-\mathcal{L})\delta(x-3)$

4) La funzione cumulativa è $F_\eta(y) = \mathcal{L}u(x+3) + (1-\mathcal{L})u(x-3)$

Quesito 3

Si vuole trasmettere la sequenza numerica 11100110110101110011 con una bitrate $R(t) = 2$ Mbit/s, utilizzando una modulazione 16-QAM con portante $f_c = 900$ KHz. Calcolare il valore del segnale modulato all'istante $\bar{t} = 7 \mu\text{sec}$, ricordando che la trasmissione di un simbolo avviene solo dopo che il simbolo è stato acquisito per intero.

SOLUZIONE

La sequenza da trasmettere è: 1110 0110 1101 0111 0011

Il segnale QAM è: $s(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t$

Dato che si sta usando al 16-QAM, i bit vengono raggruppati a 4 a 4 ($\ell = 4$) per costruire i simboli.

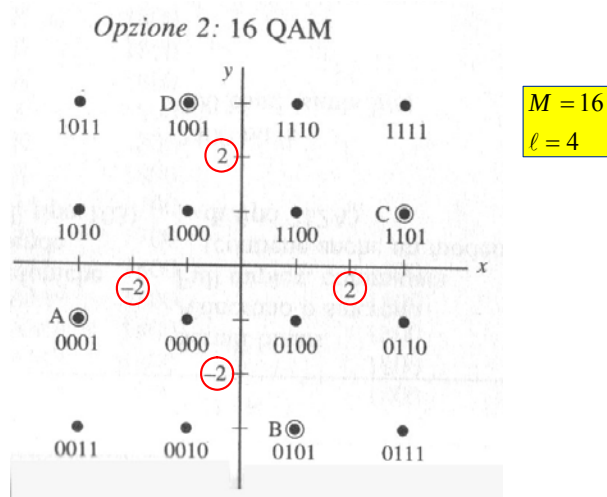
Così abbiamo:

	1110	0110	<u>1101</u>	0111	0011
$x(t)$	+1	+3	+3	+3	-3
$y(t)$	+3	-1	+1	-3	-3
$s(t)$	$1\cos\omega_c t - 3\sin\omega_c t$	$3\cos\omega_c t + 1\sin\omega_c t$	$3\cos\omega_c t - 1\sin\omega_c t$	$3\cos\omega_c t + 3\sin\omega_c t$	$-3\cos\omega_c t + 3\sin\omega_c t$

I valori di $x(t)$ e di $y(t)$ sono stati ricavati dalla costellazione della 16-QAM:

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra



Dato che la durata di simbolo è $T_s = 4T_b = 4 \cdot (2 \cdot 10^6)^{-1} = 2 \mu\text{sec}$, $\bar{t} = 7 \mu\text{sec} = 3.5T_s$ appartiene all'intervallo in cui si sta acquisendo il quarto simbolo, ma si sta trasmettendo il terzo. Quindi la forma d'onda è $3\cos\omega_c t - 1\sin\omega_c t$. Quindi il valore cercato è: $s(\bar{t}) = 3\cos\omega_c \bar{t} - 1\sin\omega_c \bar{t} = -1.8781V$.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (8 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1a)		4
1b)		4

QUESITO 2a – 2b (8 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
2a)		3
2b)		5

QUESITO 2c (8 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		2
3)		2
4)		2

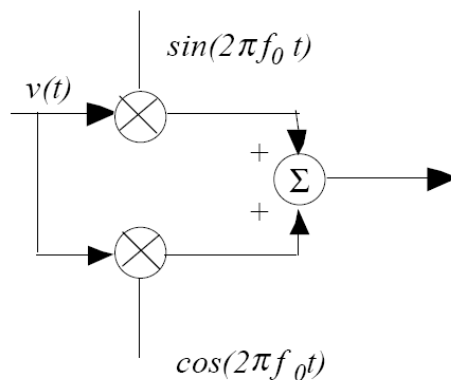
QUESITO 3 (6 punti) MIN 3 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		6

Regole per superare il compito: ottenere almeno 15 punti

COMPITO 11 - 05 dicembre 2006

Quesito 1: Segnali determinati



Un segnale $v(t)$ ripete la sequenza (02) con periodo di replica $2T_0$. Indicando $f_0 = 1/T_0$, determinare:

1. i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di $v(t)$
2. il segnale $y(t)$ in uscita del sistema in figura
3. dire se il segnale $y(t)$ è periodico ed in tal caso calcolare il periodo
4. i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di $y(t)$
5. lo spettro del segnale $y(t)$
6. la funzione di autocorrelazione del segnale $y(t)$

SOLUZIONE

Il segnale di uscita è: $y(t) = v(t)(\cos 2\pi f_0 t + \sin 2\pi f_0 t)$

Il segnale di ingresso è invece periodico della sequenza (02) con periodo $2T_0 = 2/f_0$.

Il segnale $v(t)$ è dunque rappresentabile in serie di Fourier, i cui coefficienti sono

$$c_n^v = 2 \frac{1}{2} \text{sinc} \left(\frac{n}{2} \right) e^{-j \frac{2\pi n}{2T_0} \frac{3T_0}{2}} = \text{sinc} \left(\frac{n}{2} \right) e^{-j \frac{3}{2} \pi n} \quad (1.1)$$

Dato che moltiplicare un segnale per un seno o un coseno significa traslarlo in frequenza, in questo caso lo spettro di $y(t)$ può essere ottenuto traslando quello di $v(t)$ di un numero pari al rapporto tra la frequenza ω della sinusoide e la fondamentale di $v(t)$, pari a $\frac{\omega_0}{2} \left(2\pi \frac{1}{2T_0} \right)$.

In questo caso, il rapporto vale 2. Quindi, $y(t)$ ha dei coefficienti della serie di Fourier c_n^y pari a

$$\begin{aligned} c_n^y &= \frac{c_{n-2}^v}{2} + \frac{c_{n+2}^v}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{sinc} \left(\frac{n-2}{2} \right) + \text{sinc} \left(\frac{n+2}{2} \right) \right] e^{-j \frac{3}{2} \pi n} \end{aligned}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Per quanto riguarda la correlazione, si ricordi che, per un segnale periodico,

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 e^{j \frac{2\pi n \tau}{T_0}}$$

e dunque

$$R_y(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{16} \left[\text{sinc} \left(\frac{2n-5}{2} \right) + \text{sinc} \left(\frac{2n-3}{2} \right) \right]^2 e^{j \frac{\pi n \tau}{T_0}}$$

Quesito 2a: Teoria della probabilità	
---	--

Un gruppo di amici sono soliti frequentare una sala cinematografica che proietta film d'azione (FA) per il 60% e film commedie (FC) per il 40% della programmazione. Il gruppo di amici va al cinema con probabilità pari a 0.4 nel caso in cui sia in programma un film d'azione, e con probabilità pari a 0.7 nel caso in cui il film sia una commedia. Sapendo che mercoledì scorso il gruppo di amici è andato al cinema, con che probabilità il film era d'azione?

SOLUZIONE

Indichiamo con:

$$P(\text{FA})=0.6$$

$$P(\text{FC})=0.4$$

$$P(\text{C}|\text{FA})=0.4$$

$$P(\text{C}|\text{FC})=0.7$$

$$\text{Dunque } P(\text{FA}|\text{C}) = \frac{P(\text{C}|\text{FA}) \cdot P(\text{FA})}{P(\text{C}|\text{FA}) \cdot P(\text{FA}) + P(\text{C}|\text{FC}) \cdot P(\text{FC})} = 0.46$$

Quesito 2b: Processi aleatori	
--------------------------------------	--

Si consideri un processo Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$ bilatera. Il processo è filtrato la cui funzione di trasferimento è:

$$G(f) = \sqrt{\frac{A}{2B} \left(1 - \frac{|f|}{2B} \Pi \left(\frac{f}{4B} \right) \right)}$$

Detto $Y(t)$ il processo all'uscita del filtro, determinare:

1. La densità spettrale di potenza di $Y(t)$
2. la banda a -3dB di $Y(t)$
3. la funzione di autocorrelazione di $Y(t)$ (espressione e grafico qualitativo)
4. la potenza media statistica istantanea di $Y(t)$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

5. la funzione densità di probabilità congiunta (di ordine 2) di $Y(t)$ e $Y\left(t + \frac{1}{2B}\right)$

[sugg.1: due processi gaussiani incorrelati sono anche indipendenti]

[sugg.2: la funzione densità di probabilità congiunta di due v.a. indipendenti è uguale al prodotto delle marginali].

SOLUZIONE

1. La densità spettrale di potenza di $Y(t)$ è: $S_Y(f) = \frac{N_0}{2} |G(f)|^2 = \frac{AN_0}{4B} \left(1 - \frac{|f|}{2B}\right) \Pi\left(\frac{f}{4B}\right)$.

2. La banda a -3dB si calcola imponendo: $S_Y(0) = 2S_Y(B_{-3dB})$. Dunque si ha:

$$\left[\frac{AN_0}{4B} \left(1 - \frac{f}{2B}\right) \Pi\left(\frac{f}{4B}\right) \right]_{f=0} = 2 \left[\frac{AN_0}{4B} \left(1 - \frac{f}{2B}\right) \Pi\left(\frac{f}{4B}\right) \right]_{f=B_{-3dB}}$$

$$\frac{AN_0}{4B} = 2 \frac{AN_0}{4B} \left(1 - \frac{B_{-3dB}}{2B}\right) \Rightarrow \frac{2AN_0}{4B} \frac{B_{-3dB}}{2B} = \frac{AN_0}{4B} \Rightarrow \frac{B_{-3dB}}{B} = 1$$

$$\boxed{B_{-3dB} = B}$$

3. La funzione di autocorrelazione:

L'autocorrelazione si ottiene antitrasformando $S_Y(f)$:

$$R_Y(\tau) = \frac{AN_0}{2} \text{sinc}^2(2B\tau).$$

4. La potenza media statistica è la funzione di autocorrelazione in 0: $P_Y = \frac{AN_0}{2}$

I campioni a distanza $t = 1/2B$ sono incorrelati (in quanto $\text{sinc}(1) = 0$) ed essendo Gaussiani sono anche indipendenti. La congiunta è pari dunque al prodotto delle marginali, ognuna delle quali è Gaussiana a valor medio

5. nullo e varianza pari all'autocorrelazione in $\tau = 0$, cioè $\sigma_Y^2 = AN_0/2$. La

Quindi: $f_Y\left(y_1, y_2; t, t + \frac{1}{2B}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(AN_0/2)^2}} e^{-\frac{y_1^2}{2(AN_0/2)^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(AN_0/2)^2}} e^{-\frac{y_2^2}{2(AN_0/2)^2}}$. Da cui:

$$\boxed{f_Y\left(y_1, y_2; t, t + \frac{1}{2B}\right) = \frac{1}{2\pi(AN_0/2)^2} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2(AN_0/2)^2}}}$$

Quesito 3

Si supponga di voler trasmettere 5 canali nel modo seguente:

- 3 canali AM-USSB con segnali modulanti in banda base tra 0 e 20 kHz;
- 2 canali FM con segnali modulanti in banda base tra 0 e 10 kHz

Nel caso in cui si voglia usare una banda non superiore a 150 kHz a partire dalla frequenza 100 MHz, calcolare:

1. le frequenze portanti per le tre trasmissioni a modulazione di ampiezza
2. le frequenze portanti per le 2 trasmissioni a modulazione di frequenza
3. l'indice di modulazione di frequenza β per le 2 trasmissioni a modulazione di frequenza

Supponendo di utilizzare un'ampiezza della portante per l'FM pari a $A_{c,FM} = \sqrt{2}$ V, e che la densità di potenza in banda

base dei segnali modulanti i canali AM segua la legge $5e^{-|f|}$, calcolare:

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

4. l'ampiezza della portante dei canali AM in modo tale che la potenza complessiva di trasmissione per i cinque canali sia pari a 5.5W.

SOLUZIONE

- le 3 portanti sono: $100000, 100020, 100040 \text{ KHz}$
- Per le FM rimane una banda di $150-60=90 \text{ KHz}$. Quindi le due portanti saranno a frequenze: $100082.5, 100127.5 \text{ KHz}$
- Dalla formula di Carson, imponendo $2(\beta+1)=45$, abbiamo $\beta = \frac{45}{2} - 1 = 1.25$
- La potenza di ogni segnale FM è: $\frac{A^2}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1 \text{ W}$

Dunque 3.5 W sono lasciati per i segnali AM. La potenza dei segnali modulanti è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 5e^{-|f|} df = 2 \int_0^{+\infty} 5e^{-f} df = 10 \text{ W}$$

Ricordando che la potenza di un segnale AM-SSB è $P_{SSB} = A_c^2 P_m$, abbiamo:

$$A_x^2 = \frac{3.5}{2} \frac{1}{10} = 0.175 \rightarrow A_c = 0.418 \text{ V}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (10 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		1
3)		1
4)		3
5)		1
6)		2

QUESITO 2a (4 punti) MIN 4 punti sul quesito 2 complessivo (2a + 2b)

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		4

QUESITO 2b (6 punti) MIN 4 punti sul quesito 2 complessivo (2a + 2b)

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		1
3)		1
4)		1
5)		1

QUESITO 3 (10 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		3
3)		2
4)		3

Regole per superare il compito: ottenere almeno 16 punti

COMPITO 12 - 02 febbraio 2007

Quesito 1: Segnali determinati

Lo spettro di un segnale $s(t)$ è dato da:

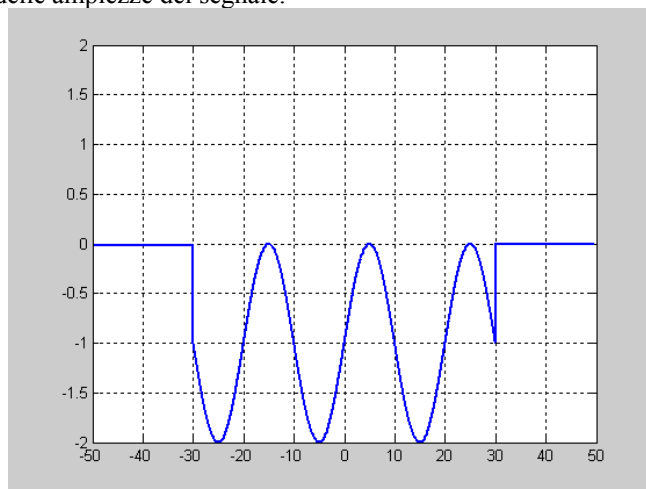
$$S(f) = \begin{cases} -1 + \sin(\pi 0.1 f) & |f| \leq 30 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- 4) Disegnare lo spettro delle ampiezze del segnale
- 5) Dire se lo spettro delle ampiezze è periodico ed eventualmente calcolare il periodo
- 6) Calcolare il segnale $s(t)$
- 7) Calcolare e disegnare qualitativamente il segnale $w(t) = |s(t)|$
- 8) Calcolare la media di $w(t)$

SOLUZIONE

$S(f)$ può essere scritto come: $S(f) = \Pi\left(\frac{f}{60}\right) \left[-1 + \sin\left(2\pi \frac{1}{T_0} f\right) \right]$. Il sin ha un periodo $F_0 = 1/(0.1/2) = 20$ Hz sulle frequenze. Indichiamo con $T_0 = \frac{1}{F_0} = 0.05$.

- 4) Disegnare lo spettro delle ampiezze del segnale.



- 5) Lo spettro delle ampiezze non è periodico, dato che oscilla solo in un intervallo limitato
- 6) Indicando con $T_0 = 0.05$, si ha:

$$S(f) = [-1 + \sin(2\pi F_0 f)] \cdot \Pi\left(\frac{f}{60}\right)$$

da cui, applicando il teorema di dualità, si ha:

$$\begin{aligned} s(t) &= \left[-\delta(t) + j\frac{1}{2}(\delta(-t + F_0) - \delta(-t - F_0)) \right] * \mathfrak{T}\left\{ \Pi\left(\frac{f}{60}\right) \right\} = \\ &= \left[-\delta(t) + j\frac{1}{2} \left(\delta\left(t + \frac{1}{T_0}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{T_0}\right) \right) \right] * 60 \text{sinc}(60t) = \\ &= -60 \text{sinc}(60t) + j30 \left[\text{sinc}\left(60\left(t + \frac{1}{T_0}\right)\right) - \text{sinc}\left(60\left(t - \frac{1}{T_0}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

7) Il segnale $w(t) = 60\text{sinc}(60t) + 30\text{sinc}\left(60\left(t + \frac{1}{T_0}\right)\right) + 30\text{sinc}\left(60\left(t - \frac{1}{T_0}\right)\right)$

8) Dato che lo spettro del segnale sinc non ha impulsi nell'origine, il segnale è a media $\langle w(t) \rangle = 0$

Quesito 2a: Variabili aleatorie

Trovare la funzione distribuzione di probabilità $F_\eta(y)$ della v.a. $y = 3 \cdot \text{sign}(x)$ se la v.a. x ha densità di probabilità gaussiana $N(4;2)$, ovvero con media e varianza entrambe pari a 4. E' necessario individuare esattamente la funzione $F_\eta(y)$ con i valori numerici (usate le tavole nel formulario). La funzione $\text{sign}(x)$ è la funzione segno definita come

$$\text{segue: } \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

La variabile aleatoria y assume il valore +3 quando la v.a. $x > 0$, e -3 quando $x < 0$. Calcoliamo dunque le seguenti probabilità:

$$G = \text{Prob}\{x \leq 0\} = F_\xi(0) = \Phi\left(\frac{0 - \eta_\xi}{\sigma_\xi}\right) = \Phi\left(\frac{-4}{2}\right) = \Phi(-2) = 2.2750 \cdot 10^{-2}$$

$$H = \text{Prob}\{x > 0\} = 1 - F_\xi(0) = 1 - 2.2750 \cdot 10^{-2} = 0.97725$$

Abbiamo allora:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} G \cdot \delta(y+3) & y = -3 \\ H \cdot \delta(y-3) & y = +3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & y < -3 \\ G & -3 \leq y < +3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

Quesito 2b: Processi aleatori

Si consideri il processo aleatorio parametrico esponenziale $X(t; \omega) = \Omega e^{-2t} u(t)$, dove Ω è una v.a. che assume i valori 0 e 1 a seconda del risultato del lancio di una moneta non truccata. Calcolare:

- 1) Valor medio del processo aleatorio.
- 2) Valore quadratico medio del processo aleatorio
- 3) Varianza del processo aleatorio

SOLUZIONE

Quesito 3

Dato un segnale generato da una sorgente digitale binaria che trasmette con bitrate $R = 900$ kbit/s. Supponendo di utilizzare per la trasmissione impulsi sagomati a coseno rialzato, calcolare il coefficiente di roll-off (motivandone la scelta) affinché il segnale passi attraverso un canale ideale nell'intervallo di frequenze $[11.0, 16.0]$ MHz nel caso di:

- 1) modulazione ASK con frequenza portante $f_c = 15.2$ MHz e ampiezza della portante $A_c = 5$ V
- 2) modulazione BPSK con frequenza portante $f_c = 15.2$ MHz e ampiezza della portante $A_c = 5$ V
- 3) modulazione FSK con frequenza di mark $f_1 = 15.25$ MHz, frequenza di space $f_2 = 15.15$ MHz, e ampiezza della portante $A_c = 5$ V
- 4) modulazione QPSK con frequenza portante $f_c = 15.2$ MHz e ampiezza della portante $A_c = 5$ V
- 5) modulazione 16 QAM con frequenza portante $f_c = 15.2$ MHz e ampiezza della portante $A_c = 5$ V

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

SOLUZIONE

- 1) modulazione ASK con frequenza portante $f_c = 15.2$ MHz e ampiezza della portante $A_c = 5$ V

Dato che la frequenza della portante non è al centro della banda utile, la banda a disposizione è $2 \cdot \min\{(15.2 - 11.0), (16.0 - 15.2)\} \text{ MHz} = 1.6 \text{ MHz}$. Allora calcolo il coefficiente di roll-off imponendo che il segnale modulato deve occupare la banda di 1.6 MHz. Poiché $B_T = (1 + r)R$, abbiamo:

$$r = \min\left(\frac{B_T}{R} - 1, 1\right) = \min\left(\frac{1.6 \cdot 10^6}{700 \cdot 10^3} - 1, 1\right) = \min(1.2857, 1) = 1$$

- 2) modulazione BPSK con frequenza portante $f_c = 15.2$ MHz e ampiezza della portante $A_c = 5$ V

Per lo stesso ragionamento del punto 1 abbiamo $r = 1$

- 3) modulazione FSK con frequenza di mark $f_1 = 15.25$ MHz, frequenza di space $f_2 = 15.15$ MHz, e ampiezza della portante $A_c = 5$ V

Poiché $B_T = 2\Delta F + (1 + r)R$ e $2\Delta F = f_1 - f_2 = 0.1 \text{ MHz}$, abbiamo che:

$$r = \frac{B_T - 2\Delta F - R}{R} = \frac{1.6 \cdot 10^6 - 0.10 \cdot 10^6 - 0.9 \cdot 10^6}{0.9 \cdot 10^6} = 0.71429$$

- 4) modulazione QPSK con frequenza portante $f_c = 15.2$ MHz e ampiezza della portante $A_c = 5$ V

Non è necessario sagomare il filtro a coseno rialzato dato che la banda occupata da un QPSK è

$$B_T = \frac{2R}{l} = \frac{2R}{2} = 900 \text{ kHz}, \text{ mentre abbiamo a disposizione una banda di canale di } 1.6 \text{ MHz}.$$

- 5) modulazione 16 QAM con frequenza portante $f_c = 15.2$ MHz e ampiezza della portante $A_c = 5$ V

Calcoliamo il coefficiente di roll-off del filtro a coseno rialzato:

$$r = l \frac{B_T}{R} - 1 = 4 \frac{1.6 \cdot 10^6}{0.9 \cdot 10^6} - 1 = 8.1429$$

L'aver trovato un coefficiente di roll-off maggiore di 1 non significa che possiamo non utilizzare un filtro a coseno rialzato, ma che possiamo sagomare il filtro a coseno rialzato con il coefficiente di roll-off massimo consentito: $r = 1$.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (10 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		1
3)		3
4)		2
5)		2

QUESITO 2a (4 punti) MIN 5 punti sul quesito 2 complessivo (2a + 2b)

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		4

QUESITO 2b (6 punti) MIN 4 punti sul quesito 2 complessivo (2a + 2b)

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		3
2)		2
3)		1

QUESITO 3 (10 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		2
3)		2
4)		2
5		2

Regole per superare il compito: **Ottenere almeno 15 punti complessivamente**

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 13 - 30 marzo 2007

Nota: SVOLGERE SOLO UN QUESITO TRA IL QUESITO 1a E IL QUESITO 1b

Quesito 1a: Segnali determinati

Calcolare la convoluzione tra i due seguenti segnali:

$$x_1(t) = 3\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) \quad \text{e} \quad x_2(t) = 2\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

SOLUZIONE

$$y(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau \leq 0 \\ 6\tau & \text{se } 0 \leq \tau \leq 2 \\ 12 & \text{se } 2 \leq \tau \leq 4 \\ 36 - 6\tau & \text{se } 4 \leq \tau \leq 6 \\ 0 & \text{se } \tau \geq 6 \end{cases}$$

Quesito 1b: Variabili aleatorie

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1 & x \in [-1, 0) \\ -cx + 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- 1) calcolare il valore della costante c affinché essa sia una funzione densità di probabilità
- 2) calcolare poi la funzione distribuzione cumulativa $F(x)$;
- 3) calcolare il valore medio della variabile aleatoria
- 4) calcolare la varianza della variabile aleatoria

SOLUZIONE

- 1) Imponiamo che l'area sotto la pdf sia unitaria. Calcolando l'area in maniera geometrica come somma di un rettangolo e di un quadrato, otteniamo:

$$A = 2(1-c) + \frac{2c}{2} = 2 - c \rightarrow \boxed{c=1} \quad \rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$2) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(\sigma) d\sigma = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \int_{-1}^x (\sigma+1) d\sigma = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \int_0^x (-\sigma+1) d\sigma = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- 3) Il valore medio è $\boxed{\mu=0}$ perché la $f(x)$ è pari
- 4) Calcoliamo ora il valore quadratico medio:

$$E\{X^2\} = \int_{-1}^0 \sigma^2 (\sigma+1) d\sigma + \int_0^1 \sigma^2 (-\sigma+1) d\sigma = \frac{1}{6}$$

$$\text{Dunque la varianza è: } \boxed{\sigma_x^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\} = \frac{1}{6}}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Quesito 2

Si vuole trasmettere senza ISI un segnale dati binario con bit-rate R attraverso un canale con rapporto segnale/rumore in ricezione $S/N = 20$ (in scala lineare), e avente la seguente risposta in frequenza:

$$H(f) = \begin{cases} 3 & |f| \leq F_1 \\ 3e^{-(f-F_1)/F_2} & F_1 \leq |f| \leq F_2 \\ 0 & |f| > F_2 \end{cases} \quad \text{con } F_1 = 7 \text{ MHz e } F_2 = 9 \text{ MHz}$$

Nell'ipotesi di utilizzare un codice di linea NRZ unipolare, determinare la sagomatura dell'impulso binario che annulla l'ISI nei seguenti casi:

- 1) $R = R_1 = 2870$ kbit/s
- 2) $R = R_2 = 5860$ kbit/s
- 3) $R = R_3 = 9992$ kbit/s
- 4) $R = R_4 = 14276$ kbit/s

Nei casi in cui non è possibile annullare l'ISI con una codifica binaria,

- 5) progettare un codice di linea multilivello, indicando la complessità del codice (numero di livelli), e i parametri del filtro di Nyquist a cos rialzato.

SOLUZIONE

Il canale è lineare nella banda $[-F_1, F_1]$. Quindi la banda a disposizione per la trasmissione è $B_c = F_1 = 7$ MHz.

- 1) Per $R = R_1 = 2870$ kbit/s, dato che $R_1 < B_c$, qualunque sagomatura cos rialzato va bene. Quindi scegliamo $r = 1$ e $f_0 = R/2 = R_1/2 = 1435$ KHz.
- 2) Per $R = R_2 = 5860$ kbit/s, dato che $R_2 < B_c$, qualunque sagomatura cos rialzato va bene. Quindi scegliamo $r = 1$ e $f_0 = R/2 = R_2/2 = 2930$ KHz.
- 3) Per $R = R_3 = 9992$ kbit/s, dato che $B_c < R_3 < 2B_c$, e quindi possiamo progettare il filtro a coseno rialzato come segue: $r = \frac{2B_c}{R} - 1 = \frac{14000}{9992} - 1 = 0.4$, mentre $f_0 = R/2 = R_3/2 = 4996$ KHz.
- 4) Per $R = R_4 = 14276$ kbit/s, dato che $R_4 > 2B_c$, non è possibile annullare l'ISI.
- 5) Il caso in cui non è possibile annullare l'ISI con un codice binario è il 3. Calcoliamo ora il codice multilivello.

Il numero di livelli necessari è: $\ell = \left\lceil \frac{B_{MIN}^{(bin)}}{B_c} \right\rceil = \left\lceil \frac{R/2}{B_c} \right\rceil$ poichè $B_{MIN}^{(bin)} = R/2$ dato che stiamo utilizzando una codifica

NRZ. Quindi $\ell = \left\lceil \frac{B_{MIN}^{(bin)}}{B_c} \right\rceil = \left\lceil \frac{R/2}{B_c} \right\rceil = \left\lceil \frac{14276/2}{7000} \right\rceil = 2$.

Inoltre risulta: $f_0 = \frac{D}{2} = \frac{R_4}{2\ell} = 3569$ e $r = \frac{2B_c}{D} - 1 = \frac{14000}{R/2} - 1 = 0.96$.

Teniamo però conto che l'SNR è 20. Quindi $\eta_{MAX} = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 4.39$. Calcoliamo ora l'efficienza η :

$\eta_4 = \frac{2\ell}{1+r} = \frac{4}{1.96} = 2.04$. Concludendo, nel caso 4 è possibile utilizzare il codice multilivello per annullare l'ISI, dato che $\eta_4 < \eta_{MAX}$.

Quesito 3

Dati $N = 4$ segnali in banda base a coseno rialzato con diversi coefficienti di roll-off e frequenza a -6dB $f_0 = 160$ Hz. Il generico segnale $s_i(t)$, con $i \in [1, N]$, ha roll-off pari a $r = 0.1 i$. Li si vuole trasmettere assieme ad una sequenza di dati binari con bitrate $R = 350$ bit/s e formattazione dell'impulso a coseno rialzato con $r = 0.7$ su un canale che si comporta in maniera ideale al di sopra della frequenza $f_{min} = 1$ kHz.

Nel caso in cui si utilizzi una modulazione USSB per gli N segnali analogici, e una FSK con indice di modulazione $h = 1.82$ per il segnale digitale, e supponendo di utilizzare la stessa ampiezza della portante $A_c = 10$ V per tutti i segnali, calcolare:

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 1) la frequenza portante da utilizzare per trasmettere ciascuno degli $N + 1$ segnali;
- 2) lo spettro delle ampiezze dei filtri ideali (a risposta all'impulso reale!) passa-banda per selezionare ciascuno degli $N + 1$ segnali;
- 3) la potenza trasmessa per il segnale digitale.
- 4) la minima frequenza di campionamento da utilizzare per il primo segnale modulato (in banda passante) affinché esso possa essere successivamente ricostruito fedelmente a partire dai suoi campioni.

Supponendo invece di utilizzare per il segnale digitale una modulazione 16-QAM, calcolare:

- 5) la banda totale necessaria per la trasmissione degli $N + 1$ segnali in banda passante
- 6) il risparmio percentuale di banda rispetto al caso di utilizzo della FSK
- 7) il valore del segnale digitale trasmesso all'istante $\bar{t} = 11.5 T_b$, dove T_b è il tempo di bit, e supponendo che i primi bit della sequenza da trasmettere sono: 01101011010110101101

SOLUZIONE

- 1) La frequenza portante da utilizzare per trasmettere ciascuno dei 2 segnali si deve calcolare tenendo conto che i segnali AM sono USSB, quindi occupano una banda pari a quella del segnale in banda base, e la portante è a sinistra della banda occupata. Le bande dei segnali analogici in banda base si calcolano come segue:

$B_x = f_0 + f_\Delta = f_0(1+r)$. Quindi abbiamo:

f_0	r	B_x
160	0.1	176
160	0.2	192
160	0.3	208
160	0.4	224

Dunque le frequenze portanti per i segnali analogici sono: 1000, 1176, 1368, 1576.

Per quanto riguarda invece il segnale digitale modulato FSK, il coefficiente di modulazione è $h = \frac{2\Delta F}{R}$.

Quindi: $\Delta F = \frac{Rh}{2} = 318.5$ Hz e quindi $B_r = 2\Delta F + (1+r)R = 637 + 1.7 \cdot 350 = 1232$ Hz. La portante per l'FSK si trova a metà, e quindi è pari a (portante ultimo segnale analogico)+(banda ultimo segnale analog.)+1/2 (banda FSK)=1576+224+0.5*1232=2416 Hz.

- 2) I filtri saranno degli impulsi rettangolari centrati nei centri delle bande occupate, e di ampiezza pari alle bande occupate:

$$\begin{aligned}
 |H_1(f)| &= \Pi\left(\frac{f+1088}{176}\right) + \Pi\left(\frac{f-1088}{176}\right), & |H_2(f)| &= \Pi\left(\frac{f+1272}{192}\right) + \Pi\left(\frac{f-1272}{192}\right), \\
 |H_3(f)| &= \Pi\left(\frac{f+1472}{208}\right) + \Pi\left(\frac{f-1472}{208}\right), & |H_4(f)| &= \Pi\left(\frac{f+1688}{224}\right) + \Pi\left(\frac{f-1688}{224}\right), \\
 |H_5(f)| &= \Pi\left(\frac{f+2416}{1232}\right) + \Pi\left(\frac{f-2416}{1232}\right)
 \end{aligned}$$

- 3) La potenza trasmessa per l'FSK è $P = \frac{A_c^2}{2} = 50$ W

- 4) La minima frequenza di campionamento $F_s = \frac{2f_2}{\left\lfloor \frac{f_2}{B} \right\rfloor} = \frac{2 \cdot 1176}{\left\lfloor \frac{1176}{176} \right\rfloor} = \underline{392 \text{ Hz}}$

- 5) La banda per il segnale, se modulato con una 16 QAM è: $B_{QAM} = (1+r)\frac{R}{\ell} = (1+0.7)\frac{350}{4} = 148.75$ Hz.

Quindi la banda totale è 176+192+208+224+148.75=948.75 Hz.

- 6) Nel caso della FSK la banda totale è 176+192+208+224+1232=2032 Hz. Quindi il guadagno è $948.75/2032 = \underline{46.69\%}$.

- 7) La sequenza di bit è 011010110101101... L'istante $\bar{t} = 11.5 T_b$ appartiene all'intervallo in cui si sta acquisendo il terzo simbolo, ma si sta trasmettendo il secondo (0110 1011 0101 101...). Poichè le coordinate del simbolo 1011 sono -3, +3, la forma d'onda è $-3\cos\omega_c t - (+3)\sin\omega_c t$. Teniamo conto inoltre che la frequenza portante f_c è quella della modulazione QAM, cioè:

$$f_c = 1000 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_{QAM} / 2 = 1000 + 176 + 192 + 208 + 224 + 74.375 = 1874.4 \text{ Hz.}$$

Quindi il valore cercato in $\bar{t} = 32.857 \mu\text{sec}$ è: $s(\bar{t}) = -3\cos\omega_c \bar{t} - 3\sin\omega_c \bar{t} = -3.91$ V.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1a (10 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		10

QUESITO 1b (10 punti) MIN 5 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		3
2)		2
3)		2
4)		3

QUESITO 2 (10 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		2
2)		2
3)		2
4)		2
5)		2

QUESITO 3 (10 punti) MIN 4 punti

DOMANDA	RISPOSTA	PUNTEGGIO
1)		1
2)		2
3)		1
4)		1
5)		2
6)		2
7)		2

Regole per superare il compito: **Ottenere almeno 15 punti complessivamente**

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 14 - 10 maggio 2007 (prova in itinere)

Quesito 1a: Segnali determinati

Dato il segnale $s(t)$ fatto da una sequenza infinita di impulsi rettangolari lunghi $\tau = 0.5 \mu s$, con ampiezza $A = 5V$, frequenza di ripetizione pari a 1MHz, e tali che ci sia un impulso centrato sull'origine dei tempi. Calcolare:

- media, potenza ed energia di $s(t)$
- spettro delle ampiezze di $s(t)$
- media, energia e potenza del segnale $y(t)$ in uscita ad un filtro passa-basso $H(f) = G \Pi\left(\frac{f}{2.3MHz}\right)$.

SOLUZIONE

$$s(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_0}{\tau}\right), \text{ dove } T_0 = \frac{1}{1MHz} = 1 \mu sec$$

$$a) \quad \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T_0} [\text{Area un rettangolo}] = \frac{\tau A}{T_0} \quad P = \langle |s(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |s(t)|^2 dt = \frac{\tau A^2}{T_0} \quad E = +\infty$$

$$b) \quad |S(f)| = \sum_n c_n \delta(f - n f_0) \quad \text{dove} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\text{Poniamo } h(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow H(f) = A \tau \text{sinc}(\tau f) \rightarrow c_n = f_0 H(n f_0) = A f_0 \tau \text{sinc}(\tau n f_0)$$

$$c) \quad Y(f) = G c_0 \delta(f) + G c_{-1} \delta(f + f_0) + G c_{+1} \delta(f - f_0)$$

$$\langle y(t) \rangle = G c_0 = G A f_0 \tau$$

$$P_y = \langle |y(t)|^2 \rangle = G^2 c_0^2 + (G)^2 c_{-1}^2 + (G)^2 c_{+1}^2 = G^2 c_0^2 + (G)^2 c_{-1}^2 + (G)^2 c_{+1}^2 = G^2 A^2 f_0^2 \tau^2 [1 + 2 \text{sinc}^2(\tau f_0)]$$

$$E_y = +\infty$$

Quesito 2a: Teoria probabilità

Data una cesta di $3x$ pacchetti confezionati, dei quali solo x contengono un regalo. Si lanci una moneta non truccata, e quindi si estraggano dalla cesta, senza reinserimento, 1 pacchetto se esce testa (T), e 2 pacchetti se esce croce (C). Determinare qual è la probabilità che si riceva almeno un regalo.

SOLUZIONE

Applicando il teorema della probabilità totale, si ha:

$$p = \text{Prob}\{\text{almeno un regalo}\} = \text{Prob}\{\text{almeno un regalo}|T\} \frac{1}{2} + \text{Prob}\{\text{almeno un regalo}|C\} \frac{1}{2} =$$

$$= \text{Prob}\{1 \text{ regalo}|T\} \frac{1}{2} + [1 - \text{Prob}\{0 \text{ regali}|C\}] \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{x}{3x} \frac{1}{2} + \left[1 - \frac{3x-x}{3x} \frac{3x-x-1}{3x-1} \right] \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \left[1 - \frac{2}{3} \frac{2x-1}{3x-1} \right] \frac{1}{2}$$

Se invece si fosse richiesto esattamente un regalo (e non almeno un regalo), avremmo avuto:

$$p_1 = \frac{x}{3x} \frac{1}{2} + \frac{x}{3x} \frac{x-1}{3x-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{x-1}{6(3x-1)}$$

Quesito 2b: Teoria probabilità

Tra i villeggianti di una località di mare, il 75% trascorre le vacanze sempre nello stesso posto, il 25% solo saltuariamente. Il 60% dei villeggianti abitudinari possiede una casa e così il 10% dei villeggianti saltuari. Sapendo che un villeggiante scelto a caso possiede una casa, con che probabilità si tratta di un abitudinario?

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

SOLUZIONE

A={villeggianti abituarini}

S={villeggianti saltuari}

C={villeggianti che posseggono una casa}

NC={villeggianti che non posseggono una casa}

Dati:

$$p_A = 0.75$$

$$p_S = 0.25$$

$$p_{CIA} = 0.6$$

$$p_{CIS} = 0.1$$

Per Bayes, abbiamo:

$$p_{A|C} = \frac{p_{CIA} \cdot p_A}{p_{CIA} \cdot p_A + p_{CIS} \cdot p_S} = 0.95$$

Quesito 3a: Variabili aleatorie

Si consideri la funzione

$$F(x) = \begin{cases} a \cdot e^{bx} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

con $a \in [0,1]$ e $b > 0$ opportuni numeri reali.

- $F(x)$ può essere una funzione cumulativa di probabilità (cdf)? ed eventualmente per quali valori dei parametri a e b ?
- per quali valori dei parametri a e b , $F(x)$ è una cdf di una variabile casuale continua?
- si calcoli la funzione densità di probabilità, la media e la varianza per $a = 1$ e $b = 1$
- si calcoli la funzione densità di probabilità, la media e la varianza per $a = 0.2$ [valori minori di 1] e $b = 1$

[Sugg.: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r e^x = 0$, $\forall r > 0$]

SOLUZIONE

- SI, per qualunque $a \in [0,1]$ e $b > 0$.
- $a = 1$ e $b > 0$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} ab \cdot e^{bx} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = ab \int_{-\infty}^0 x e^{bx} dx = ab \left[e^{bx} \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{b^2} \right) \right]_{-\infty}^0 = ab \left(-\frac{1}{b^2} \right) \rightarrow E\{x\} = -\frac{a}{b}$$

$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = ab \int_{-\infty}^0 x^2 e^{bx} dx = ab \left[e^{bx} \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2x}{b^2} + \frac{2}{b^3} \right) \right]_{-\infty}^0 = ab \left(\frac{2}{b^3} \right) \rightarrow E\{x^2\} = 2 \frac{a}{b^2}$$

$$\text{var}_x = E\{x^2\} - E^2\{x\} = 2 \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a(2-a)}{b^2} \rightarrow \text{var}_x = \frac{a(2-a)}{b^2}$$

$$d) \quad f(x) = ab \cdot e^{bx} \cdot u(-x) + (1-ab)\delta(x)$$

$$E\{x\} = -\frac{a}{b} + 0 \cdot (1-ab) \rightarrow E\{x\} = -\frac{a}{b}$$

$$E\{x^2\} = 2 \frac{a}{b^2} + 0^2 \cdot (1-ab) \rightarrow E\{x^2\} = 2 \frac{a}{b^2}$$

$$\rightarrow \text{var}_x = \frac{a(2-a)}{b^2}$$

Quesito 3b: Variabili aleatorie

Data la variabile gaussiana $\xi = N(\text{xx}; 12)$, dove i due numeri tra parentesi rappresentano media e la varianza, rispettivamente. Si calcoli:

- le seguenti probabilità: $\text{Prob}\{\xi \leq \text{xx}\}$ $\text{Prob}\{\xi \leq \text{xx}-1\}$ $\text{Prob}\{\xi \leq \text{xx}+1\}$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Supponendo di trasformare la variabile ξ con la legge:

$$y = g(x) = \begin{cases} k1 & x \leq xx-1 \\ \frac{k2-k1}{2}x - \frac{1}{2}(xx-1)(k2-k1) + k1 & xx-1 < x \leq xx+1 \\ k2 & x > xx+1 \end{cases}$$

calcolare:

- b) la pdf della nuova variabile aleatoria $\eta = g(\xi)$, il suo grafico qualitativo e il valore medio.

SOLUZIONE

a) $p1 = \text{Prob}\{\xi \leq xx\} = 0.5$

$$p2 = \text{Prob}\{\xi \leq xx-1\} = \Phi\left(\frac{xx-1-xx}{\sqrt{vv}}\right) = \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{vv}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{-1}{\sqrt{2 \cdot vv}}\right) =$$

$$p3 = \text{Prob}\{\xi \leq xx+1\} = 1 - \text{Prob}\{\xi \geq xx+1\} =$$

$$= 1 - \text{Prob}\{\xi \leq xx-1\} = \Phi\left(\frac{xx-1-xx}{\sqrt{vv}}\right) = \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{vv}}\right) = 1 - p2$$

b) $f_{\eta}(y) = f_{\xi}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$

Per $xx-1 < x < xx+1 \rightarrow y = Ax + B$ dove:

$$A = \frac{k2-k1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}(xx-1)(k2-k1) + k1 \quad \text{da cui:}$$

$$x = g^{-1}(y) = \frac{1}{A}y - \frac{B}{A} \quad \text{e}$$

$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi vv}} e^{-\frac{\left(\frac{1}{A}y - \frac{B}{A} - xx\right)^2}{2vv}} + p2 \cdot \delta(y-k1) + (1-p2) \cdot \delta(y-k2) & \text{if } k1 \leq y \leq k2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La media può essere calcolata direttamente dalla pdf, mettendo nell'equazione della gaussiana, il termine $\frac{1}{A}$ in evidenza al numeratore dell'esponenziale. Otteniamo:

$$E\{\eta\} = A \cdot xx + B + p2 \cdot k1 + (1-p2) \cdot k2$$

Quesito 4a: Processi aleatori

Dato un processo aleatorio $X(t)$ stazionario, ergodico, Gaussiano, supposto che possa essere considerato bianco a valle di un filtro ideale nella banda di frequenze $[-B, +B]$. Sia $\sigma_x^2 = 20$ la sua varianza. Calcolare:

- la banda B del processo $X(t)$
- la media temporale di una sua realizzazione scelta a caso;
- il valore medio statistico del processo $Y(t)$ all'uscita di un sistema lineare tempo invariante che ha in ingresso

$$X(t) \text{ e funzione di trasferimento } H(f) = \left(\frac{1}{6} e^{j8\pi f} + j8\pi f \right)^{-1}$$

- lo spettro $P_Y(f)$ del processo aleatorio $Y(t)$.

SOLUZIONE

- Lo spettro di potenza del processo aleatorio è $S_x(f) = \frac{N_0}{2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$. Dato che il processo è a valor medio nullo, essendo gaussiano bianco, $P = \sigma_x^2 = 20$. Dunque, imponendo che l'area sotto lo spettro sia pari alla potenza, si

$$\text{ha: } \frac{N_0}{2} \cdot 2B = \sigma_x^2, \text{ da cui: } B = \frac{20}{K}$$

- La media temporale di una sua qualunque realizzazione è nulla;
- La media statistica dell'uscita è: $\mu_Y = \mu_X H(0) = 0$.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

d) Lo spettro dell'uscita è:

$$S_y(f) = \begin{cases} \frac{N_0/2}{36 \cos^2(8\pi f) + \left(\frac{1}{6} \sin(8\pi f) + 8\pi f\right)^2} & \text{se } |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quesito 4b: Processi aleatori

Dato il processo aleatorio parametrico $X(t; A) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t-K-2nK}{K}\right)$, con A variabile aleatoria gaussiana a media

$R=10$ e varianza unitaria;

- disegnare due sue realizzazioni, e calcolarne la media temporale;
- calcolare la funzione densità di probabilità e la media statistica all'istante K ;
- calcolare la funzione densità di probabilità e la media statistica all'istante $2K$;
- dire se il processo è stazionario in senso lato;
- dire se il processo è ergodico.

SOLUZIONE

a) due sue realizzazioni sono:

$$X(t; A_1) = A_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t-K-2nK}{K}\right), \text{ treno di impulsi triangolari di altezza } A_1;$$

$$\langle X(t; A_1) \rangle = \frac{\text{Area}_{\text{triangolo}}}{\text{Periodo}} = \frac{A_1}{2}$$

$$X(t; A_2) = A_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t-K-2nK}{K}\right), \text{ treno di impulsi triangolari di altezza } A_2;$$

$$\langle X(t; A_2) \rangle = \frac{\text{Area}_{\text{triangolo}}}{\text{Periodo}} = \frac{A_2}{2}$$

b) all'istante K la funzione densità di probabilità è $f_x(x, t=K) = N(R, 1)$

e la media statistica è: $E\{X(K, A)\} = E\{A\} = R$

c) all'istante $2K$ la funzione densità di probabilità è $f_x(x, t=2K) = \delta(x)$

e la media statistica è: $E\{X(2K, A)\} = 0$

d) il processo NON È STAZIONARIO in senso lato, dato che già due realizzazioni hanno media temporale diversa; quindi NON È nemmeno ERGODICO.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (5 punti)		
a		2
b		1
c		2

QUESITO 2a (4 punti)		
a		4

QUESITO 2b (3 punti)		
a		3

QUESITO 3a (5 punti)		
a		0.5
b		0.5
c		1
d		3

QUESITO 3b (5 punti)		
a		2
b		3

QUESITO 4a (4 punti)		
a		1
b		1
c		1
d		1

QUESITO 4b (4 punti)		
a		1
b		1
c		1
d		0.5
e		0.5

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 16 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=3$ $\text{MIN}(Q2a+Q2b)=3$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=4$ $\text{MIN}(Q4a+Q4b)=4$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 15 - 18 giugno 2007

Quesito 1 | Segnali determinati

Sia dato il segnale $s(t) = m(t) \cdot y(t)$, dove $m(t) = A \operatorname{sinc}(B t)$ e $y(t) = \sin(C t)$. Si supponga che $s(t)$ venga posto in ingresso ad un filtro passabanda, con banda passante centrata sulla frequenza centrale $s(t)$ e guadagno G .

Si calcoli:

- 1) la frequenza e la fase di $y(t)$;
- 2) lo spettro di $m(t)$;
- 3) lo spettro bilatero, lo spettro delle ampiezze e lo spettro delle fasi di $s(t)$;
- 4) la potenza di $s(t)$;
- 5) la banda del filtro affinché passi il 90% dell'energia del segnale di ingresso $s(t)$.

SOLUZIONE

Per $A=300$ - $B=2100$ - $C=94240$

- 1) confrontando il segnale $y(t)$ con quello canonico $A \sin(2\pi F_0 t + \theta_0)$ deduciamo che la sua frequenza e la sua fase sono:

$$F_0 = C/2\pi; \quad \theta_0 = 0$$

- 2) lo spettro di $m(t)$ è: $M(f) = \frac{A}{B} \Pi\left(\frac{f}{B}\right)$;

- 3) lo spettro bilatero di $s(t)$ si può calcolare con il teorema della traslazione:

$$S(f) = \frac{1}{2} \left[e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{A}{B} \Pi\left(\frac{f-F_0}{B}\right) + e^{+j\frac{\pi}{2}} \frac{A}{B} \Pi\left(\frac{f+F_0}{B}\right) \right] \rightarrow$$

$$S(f) = \frac{A}{2B} j \left[-\Pi\left(\frac{f-F_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f+F_0}{B}\right) \right]$$

lo spettro delle ampiezze sarà allora:

$$|S(f)| = \frac{A}{2B} \left[\Pi\left(\frac{f-F_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f+F_0}{B}\right) \right]$$

dato che i due impulsi rettangolari esistono su intervalli di frequenza diversi;

lo spettro delle fasi sarà invece:

$$\angle S(f) = \begin{cases} \frac{3}{2}\pi & f \geq 0 \\ \frac{1}{2}\pi & f \leq 0 \end{cases}$$

dato che per frequenze positive nell'intorno di F_0 il segnale è immaginario puro

con ampiezza negativa, mentre nell'intorno di $-F_0$ il segnale è immaginario puro con ampiezza positiva.

- 4) la potenza di $s(t)$ è nulla poiché il segnale non è periodico;
- 5) per calcolare la banda del filtro affinché passi il 90% della potenza del segnale di ingresso $s(t)$, calcoliamo prima l'energia in ingresso e in uscita dal filtro.

$$L'energia in ingresso è: E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = 2 \left(\frac{A}{2B} \right)^2 \cdot 2B = \frac{A^2}{B}$$

Detta $2W$ la banda del filtro passabanda da determinare, l'energia all'uscita sarà:

$$E_{OUT} = \int_{-\infty}^{+\infty} |OUT(f)|^2 df = 2 \int_{-\max(F_0-B, F_0-W)}^{+\min(F_0+B, F_0+W)} G^2 |S(f)|^2 df = 2 \left(\frac{AG}{2B} \right)^2 \cdot 2W = A^2 G^2 \frac{W}{B}$$

$$\text{Per calcolare allora la banda richiesta imponiamo: } \frac{E_{OUT}}{E_s} = 0.9 \rightarrow G^2 W = 0.9 \rightarrow \boxed{2W = \frac{1.8}{G^2}}$$

Quesito 2 | Processi aleatori

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Un processo aleatorio stazionario ergodico assume in qualunque istante valori uniformemente distribuiti tra D e E . La sua funzione di autocovarianza è $C_{xx}(\tau) = Ae^{-a|\tau|} \cos(2\pi f_0 \tau)$. Calcolare:

- 1) la sua funzione di autocorrelazione
- 2) il suo spettro
- 3) la sua potenza
- 4) il valore del parametro A .

SOLUZIONE

Calcoliamo per $D=0$ e $E=10$.

La densità spettrale di potenza media del processo $x(k, t)$ si calcola come la trasformata di Fourier della sua autocorrelazione. Sapendo che l'autocovarianza e l'autocorrelazione sono legate dalla relazione:

$$H_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau) + \mu_x^2$$

come primo passo si calcola la media del processo x , di cui è nota la densità di probabilità. Quindi, applicando la definizione si ottiene:

$$\mu_x = E[x(k, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{x(k, t)}(x) dx = \int_0^{10} \frac{1}{10} x dx = \frac{1}{10} \left(\frac{10^2}{2} \right) = 5$$

L'autocorrelazione risulta allora:

$$H_{xx}(\tau) = Ae^{-a|\tau|} \cos(2\pi f_0 \tau) + 25$$

Per il calcolo della trasformata di Fourier, ricordando che $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$, si ottiene:

$$S_{xx}(f) = \frac{A}{2} \left[\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 (f - f_0)^2} + \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 (f + f_0)^2} \right] + 25\delta(f)$$

Per determinare il valore del parametro A si deve pensare a qualche relazione, riguardante le grandezze statistiche in gioco (H_{xx} , C_{xx} , ecc.), che deve essere soddisfatta. In particolare, si considera che il valore dell'autocorrelazione calcolata in 0 coincide con il valore quadratico medio del processo:

$$H_{xx}(0) = E[x(k, t + \tau)x(k, t)]|_{\tau=0} = E[x^2(k, t)]$$

Il valore quadratico medio del processo può essere facilmente calcolato a partire dalla densità di probabilità di x :

$$E[x^2(k, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{x(k, t)}(x) dx = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^2 dx = \frac{1}{10} \left(\frac{10^3}{3} \right) = \frac{100}{3}$$

Si conclude quindi:

$$H_{xx}(0) = A + 25 = \frac{100}{3} \implies A = \frac{100}{3} - 25 = \frac{25}{3}$$

Quesito 3a	Trasmissione in banda base
-------------------	-----------------------------------

Si consideri un segnale con una densità di probabilità definita come segue:

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

$$f_v(x) = \begin{cases} -\frac{1}{V_p^2}x + \frac{1}{V_p} & 0 \leq x \leq V_p \\ \frac{1}{V_p^2}x + \frac{1}{V_p} & -V_p \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Il segnale è inviato ad un sistema PCM con quantizzatore uniforme a 256 livelli tra $-V_p$ e $+V_p$. Calcolare:

- 1) la potenza (cioè la varianza) del segnale (aleatorio) $v(t)$
- 2) la potenza (cioè la varianza) del rumore di quantizzazione
- 3) il rapporto segnale-rumore di picco
- 4) il rapporto segnale-rumore medio

Se il segnale viene invece inviato ad un quantizzatore a legge μ a L livelli tra $-V_p$ e $+V_p$, e con $\mu = 128$, calcolare:

- 5) il rapporto segnale-rumore di picco
- 6) il rapporto segnale-rumore medio

SOLUZIONE

- 1) la potenza (cioè la varianza) del segnale (aleatorio) $v(t)$ è:

$$P_s^{(media)} = \int_{-V_p}^{+V_p} x^2 f_s(x) dx = \frac{2}{V_p^2} \int_0^{+V_p} x^2 (-x + V_p) dx = \frac{2}{V_p^2} \left[-\frac{1}{4}x^4 + V_p \frac{x^3}{3} \right]_0^{V_p} = \frac{2}{V_p^2} \left(-\frac{V_p^4}{4} + \frac{V_p^4}{3} \right) = \frac{1}{6} V_p^2 \quad \rightarrow \quad P_s^{(media)} = \frac{1}{6} V_p^2$$

- 2) la potenza (cioè la varianza) del rumore di quantizzazione è: $P_N = \frac{V_p^2}{3M^2}$

- 3) il rapporto segnale-rumore di picco è $SNR_{pk} = 3M^2$

- 4) il rapporto segnale-rumore medio è: $SNR_{medio} = \frac{M^2}{2}$

Se il segnale viene invece inviato ad un quantizzatore a legge μ a 256 livelli tra $-V_p$ e $+V_p$, e con $\mu = 128$,

- 5) il rapporto segnale-rumore di picco rimane lo stesso del caso di quantizzazione uniforme,

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{pk} = \frac{3M^2}{\ln(1+\mu)^2 \cdot \left[\left(\frac{x_{eff}}{V_p} \right)^2 + \frac{4}{\mu} \int_0^1 x f(x) dx + \frac{1}{\mu^2} \right]} = \frac{3 \cdot M^2}{\ln(1+\mu)^2 \cdot \left[\left(\frac{x_{eff}}{V_p} \right)^2 + \frac{4}{\mu} \frac{1}{V_p^2} \frac{-2+3V_p}{6} + \frac{1}{\mu^2} \right]}$$

- 6) per calcolare il rapporto segnale-rumore medio dobbiamo valutare quale approssimazione utilizzare.

Dato che $x_{eff} = \sqrt{P_s^{(media)}} = \sqrt{P_s^{(media)}}$ è molto piccola si ha: $\left(\frac{S}{N} \right)_{dB, medio}^{(\mu)} = \left(\frac{S}{N} \right)_{dB, medio}^{(Quant_Uniforme)} + 20 \log_{10} \frac{\mu}{\ln(1+\mu)} \text{ dB}$

Dato che $x_{eff} = \sqrt{P_s^{(media)}} = \sqrt{P_s^{(media)}}$ è prossimo a V_p si ha: $\left(\frac{S}{N} \right)_{dB, medio}^{(\mu)} = 6.02n + 4.77 - 20 \log_{10} (\ln(1+\mu)) \text{ dB}$

Quesito 3b Trasmissione in banda passante

Sia $x(t)$ un segnale in banda base normalizzato ($|x(t)| \leq 1$), con potenza è 0.5W e larghezza di banda $B = 10\text{KHz}$. Tale segnale viene inviato su di un canale passabanda ideale fra 99 MHz e 101 MHz che introduce un rumore additivo gaussiano bianco di densità spettrale $\frac{N_0}{2} = 10^{-9} \text{ W/Hz}$ ed un'attenuazione pari a 20 dB.

Si supponga di utilizzare una modulazione AM a portante soppressa, con portante $f_c = 100 \text{ MHz}$. Calcolare:

- 1) la potenza media necessaria in trasmissione affinché si ottenga un rapporto segnale/rumore a destinazione di 30 dB.
- 2) Usando il valore di potenza media in trasmissione calcolato al punto precedente, trovare il rapporto segnale/rumore a destinazione a valle del demodulatore, supponendo che questo sia un demodulatore a inviluppo

Si supponga di modulare $x(t)$ in FM usando la stessa portante del caso precedente, e un indice di modulazione di frequenza $\beta = 11$.

- 3) Verificare che la modulazione sia compatibile con il canale assegnato
- 4) Calcolare la potenza media necessaria in trasmissione affinché si ottenga un rapporto segnale/rumore a destinazione di 30 dB.

SOLUZIONE

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 1) Sappiamo che per una DSB-SC l'SNR è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{P_{s,RX}}{N_0 B} = \frac{P_{s,TX} G_C}{\frac{N_0}{2} 2B} \quad \text{da cui possiamo ricavare}$$

$$P_{s,TX} = \text{Attenuazione} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{out} \frac{N_0}{2} 2B = 10^2 10^3 10^{-9} 20 \cdot 10^3 = 2 \text{ W}$$

- 2) Non è possibile utilizzare un demodulatore a involuppo se si sta usando una DSB-SC
3) La larghezza di banda del segnale modulato è, per Carson:

$$B_{TX} = 2(\beta + 1)B = 2 \cdot 12 \cdot 10^3 = 24 \text{ KHz}$$

che è abbondantemente inferiore a quella del canale, pari a $B_C = 2 \text{ MHz}$

Sappiamo che per una FM l'SNR è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 3 \cdot P_{s,RX} \frac{\beta_F^2}{N_0 B} \frac{P_m}{V_p^2} = 3 \cdot \frac{P_{s,TX}}{\text{Attenuazione}} \frac{\beta_F^2}{N_0 B} \frac{P_m}{V_p^2} \quad \text{da cui possiamo ricavare}$$

$$P_{s,TX} = \frac{\text{Attenuazione}}{3\beta_F^2 P_m} \left(\frac{S}{N}\right)_{out} \frac{N_0}{2} 2B \cdot V_p^2 = \frac{10^2 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1}{3 \cdot 11^2 \cdot 0.5} = \frac{2}{181.5} = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (8 punti)		
1)		3
2)		1
3)		1
4)		1
5)		2

QUESITO 2 (10 punti)		
1)		2
2)		3
3)		2
4)		3

QUESITO 3a (6 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1
5)		1
6)		1

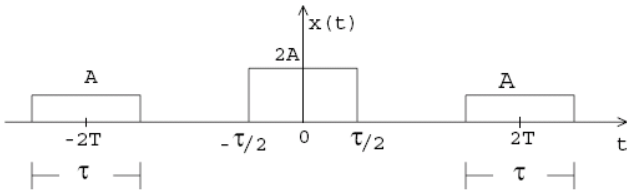
QUESITO 3b (6 punti)		
1)		2
2)		1
3)		1
4)		2

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 16 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=4$ $\text{MIN}(Q2)=4$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=6$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 16 - 09 luglio 2007

Quesito 1	Segnali determinati	
-----------	---------------------	--

Dato il segnale a energia finita $x(t)$ rappresentato in figura, calcolare:

- 1) lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-3T, +3T]$
- 2) la media temporale
- 3) l'energia e la potenza

Dato il segnale $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - 10nT)$, calcolare

- 4) lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-\infty, +\infty]$
- 5) la media temporale
- 6) l'energia e la potenza

SOLUZIONE

- 1) Detto $\omega_0 = 2\pi \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{T}$, abbiamo:

$$c_n = \frac{1}{6T} \cdot \int_{-3T}^{3T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{6T} \cdot \left[\int_{-2T}^{-T/2} e^{-jn\omega_0 t} dt + 2 \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{+T/2}^{+2T} e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2A}{\pi n} \left(1 + e^{j\frac{2}{3}\pi n} \right) \cdot \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)$$

- 2) La media temporale in $[-3T, +3T]$ è pari a $c_0 = \frac{2}{3} A \frac{\tau}{T}$

- 3) $E = 2A^2\tau + 4A^2\tau = 6A^2\tau$ e $P = 0$

- 4) lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-\infty, +\infty]$ si ottiene come segue:

$$Y(f) = A \left[\tau \operatorname{sinc}(\tau f) \cdot e^{-j2\pi 2T f} + 2\tau \operatorname{sinc}(\tau f) + \tau \operatorname{sinc}(\tau f) \cdot e^{+j2\pi 2T f} \right] \Rightarrow$$

$$c_n = f_0 X(n f_0) = \frac{1}{10T} A \tau \left[\operatorname{sinc}\left(\tau \frac{n}{10T}\right) \cdot e^{-j2\pi 2T \frac{n}{10T}} + 2 \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{n}{10T}\right) + \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{n}{10T}\right) \cdot e^{+j2\pi 2T \frac{n}{10T}} \right]$$

$$c_n = f_0 X(n f_0) = \frac{1}{10T} \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{n}{10T}\right) A \tau \left[e^{-j2\pi \frac{n}{5}} + 2 + e^{+j2\pi \frac{n}{5}} \right] = \frac{2}{10T} \operatorname{sinc}\left(\tau \frac{n}{10T}\right) A \tau \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{n}{5}\right) \right]$$

- 5) la media temporale è:

$$c_0 = \frac{1}{10T} A \tau [1 + 2 + 1] = \frac{2}{5} A \frac{\tau}{T}$$

- 6) l'energia e la potenza

$$E = +\infty, \quad P = \frac{2A^2\tau + 4A^2\tau}{10T} = \frac{3}{5} A^2 \frac{\tau}{T}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Quesito 2	Variabili aleatorie	
------------------	----------------------------	--

Data una variabile aleatoria X con funzione densità di probabilità $f_x(x) = k \sin(\pi x)$ nell'intervallo $[0,1]$, e nulla altrove.

Determinare:

- 1) il valore del parametro k
- 2) il valore medio
- 3) la pdf della variabile Y ottenuta da X con la trasformazione illustrata in figura
- 4) il valore medio della variabile aleatoria Y

SOLUZIONE

- 1) il valore del parametro k si trova imponendo che l'area sotto la pdf sia unitaria:

$$\int_0^1 k \sin \pi x \, dx = \left. \frac{-k \cos \pi x}{\pi} \right|_0^1 = \frac{k}{\pi} 2 \implies k = \frac{\pi}{2}$$

- 2) il valore medio si calcola come segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) \, dx = \int_0^1 x \frac{\pi}{2} \sin(\pi x) \, dx$$

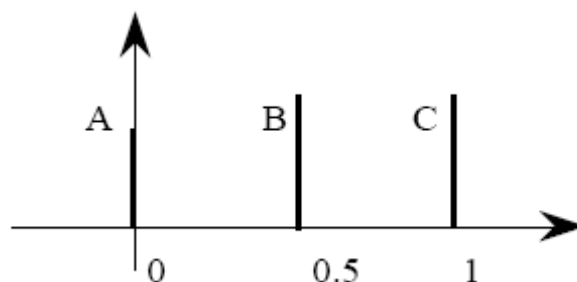
Tenendo conto che: $\int x \sin(x) \, dx = \sin x - x \cos x$, si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) \, dx = \int_0^1 x \frac{\pi}{2} \sin(\pi x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} y \sin(y) \, dy = \frac{1}{2\pi} [\sin y - y \cos y]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} [0 + \pi - 0 + 0] = \frac{1}{2}$$

Dato che la funzione di traferimento tra la variabile X e la variabile Y non è invertibile, neanche a tratti, bisognerà procedere in altro modo. In questo caso si può osservare che tutti gli ingressi compresi tra 0 e 0.3 forniscono in uscita 0, quelli tra 0.3 e 0.6 danno in uscita 0.5, mentre gli ingressi tra 0.6 e 1 danno in uscita 1. Perciò

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 0.3) &= P(Y = 0) \\ P(0.3 < X \leq 0.6) &= P(Y = 0.5) \\ P(0.6 < X \leq 1) &= P(Y = 1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dunque Y può assumere solo 3 valori (in altre parole, è una variabile casuale discreta) e la sua funzione densità di probabilità sarà come in fig.3.11.



FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Rimangono le altezze delle δ da determinarsi. Però, da (1) si ha che

$$\begin{aligned} A &= P(Y = 0) = \int_0^{0.3} f(x) dx = \int_0^{0.3} k \sin \pi x dx = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\cos \pi x}{\pi} \right)_0^{0.3} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{10} \right) \end{aligned}$$

$$B = P(Y = 0.5) = \int_{0.3}^{0.6} f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{6\pi}{10} \right)$$

$$C = P(Y = 1) = \int_{0.6}^1 \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{10} + 1 \right)$$

Come ovvio

$$A + B + C = P(Y = 0) + P(Y = 0.5) + P(Y = 1) = 1$$

4) Il valore medio della variabile aleatoria Y è: $\mu_Y = 0 \cdot A + 0.5 \cdot B + 1 \cdot C =$

Quesito 3a	Trasmissione in banda base
-------------------	-----------------------------------

Si deve realizzare un sistema PCM atto a trasmettere un segnale $x(t)$ modellabile come un processo casuale in banda base strettamente limitato in banda a 10 KHz e con distribuzione di probabilità uniforme in $[-1, +1]$ V. Si richiede che il sistema offra un rapporto S/N medio di almeno 60 dB, operando sopra soglia. Determinare:

PROGETTAZIONE DEL SISTEMA

- 1) la minima frequenza di campionamento necessaria
- 2) il numero di bit del quantizzatore
- 3) il valore del rapporto S/N medio effettivo alla soglia
- 4) il valore della probabilità di errore $\tilde{p}$ alla soglia

UTILIZZO REALE DEL SISTEMA

Supponendo che il segnale $x(t)$ abbia una dinamica compresa in $[-0.7, +0.7]$ V, sempre con densità di probabilità uniforme, che il quantizzatore abbia ancora una dinamica compresa in $[-1, +1]$ V, e che la probabilità di errore sul bit del sistema trasmissivo sia $p = \tilde{p}/2$, si chiede di determinare:

- 5) il valore del rapporto S/N medio effettivamente ottenuto nelle condizioni di utilizzo sopra indicate
- 6) se il sistema opera sopra soglia nelle condizioni sopra indicate

SOLUZIONE

- 1) la minima frequenza di campionamento necessaria è $f_c = 2B = 20$ kHz
- 2) Per operare sopra soglia dobbiamo scegliere un numero di bit tali da avere un rapporto S/N medio in trasmissione pari a (60+3) dB. Quindi, applicando la regola dei 6 dB, occorre utilizzare $n = \lceil 63/6.02 \rceil = \lceil 10.46 \rceil = 11$
- 3) Avendo scelto $n = 11$, il rapporto S/N effettivo alla soglia è: $(S/N)_{OUT} = 6.02 \cdot n = 66.22$ dB
- 4) $\tilde{p} = \frac{1}{4(M^2 - 1)} = \frac{1}{4(2048^2 - 1)} = 5.96 \cdot 10^{-8}$
- 5) il valore del rapporto S/N medio effettivamente ottenuto si può calcolare come rapporto tra la potenze media del segnale e quella di rumore:

Ricordando che il valore quadratico medio di una v.a. uniformemente distribuita è $m_x^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$, abbiamo:

$$P_s^{(media)} = x_{eff}^2 = \int_{-0.7}^{+0.7} x^2 \frac{1}{1.4} dx = \frac{0.7^2 - 0.7^2 + 0.7^2}{3} = 0.163$$

Per quanto riguarda il rumore, abbiamo:

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

$$P_N = \frac{V_p^2}{3M^2} = \frac{1^2}{3 \cdot 2048^2} = 7.95 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{Quindi: } (S/N)_{OUT} = \frac{0.163}{7.95 \cdot 10^{-8}} = 2051014.656 = 63.11 \text{ dB}$$

- 6) Opera sopra soglia dato che siamo sopra i 60 dB richiesti.

Quesito 3b	Trasmissione in banda passante
-------------------	---------------------------------------

Siano dati i seguenti segnali:

- a) 5 segnali con banda 20 kHz, modulati AM-DSB
- b) 3 segnali FM con $\beta = 3$ e banda base di 10 kHz

Determinare:

- 1) la banda di trasmissione in caso si utilizzi una multiplazione di frequenza per trasmettere contemporaneamente i suddetti segnali;
- 2) l'indice di modulazione dei segnali AM, sapendo che:
 - a. la portante di tutti e gli 8 segnali (AM e FM) ha ampiezza 1 V
 - b. la potenza totale trasmessa è pari a 5 W
 - c. il segnale modulante è assimilabile ad una variabile casuale con pdf costante in $[-1, +1]$ V

[suggerimento: è un modo per dare media e potenza del segnale modulante]

[suggerimento: il segnale che viene effettivamente modulato è pari al segnale modulante per l'indice di modulazione]

SOLUZIONE

- 1) I segnali AM occupano ciascuno una banda $B_{AM} = 2 \cdot 20 = 40 \text{ kHz}$

I segnali FM occupano ciascuno una banda $B_{FM} = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 10 = 80 \text{ kHz}$

La banda totale richiesta è dunque: $B_{TOT} = 5 \cdot 40 + 3 \cdot 80 = 440 \text{ kHz}$

- 2) Il segnale modulato AM ha espressione: $s(t) = A_c(1 + m s(t)) \cos(2\pi f_c t)$. Dato che il segnale modulante è a

media nulla e potenza data da: $P_w^{(media)} = x_{eff}^2 = \int_{-1}^{+1} x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1^2 - 1^2 + 1^2}{3} = \frac{1}{3}$

La sua potenza è: $P_s = \frac{1}{2} A_c^2 [1 + m^2 P_m]$. Impostiamo allora l'equazione:

$$5 = 3 \cdot \frac{A_c^2}{2} + 5 \cdot \frac{A_c^2}{2} + 5 \cdot \frac{A_c^2}{2} m^2 P_m \rightarrow 5 = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} m^2 \frac{1}{3} \rightarrow 5 = 3 + \frac{5}{6} m^2 \rightarrow 5 = 4 + \frac{5}{6} m^2 \rightarrow$$

$$m = \sqrt{\frac{6}{5}} = 1.095$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (10 punti)		
1)		2
2)		1
3)		2
4)		2
5)		1
6)		2

QUESITO 2 (10 punti)		
1)		2
2)		2
3)		3
4)		3

QUESITO 3a (6 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1
5)		1
6)		1

QUESITO 3b (4 punti)		
1)		1
2)		3

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=4$ $\text{MIN}(Q2)=4$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=6$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 17 - 03 settembre 2007

Quesito 1	Segnali determinati
------------------	----------------------------

Dati i segnali $x(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{6}\right)$ e $y(t) = \Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$, calcolare:

1. La media temporale dei due segnali
2. L'energia dei due segnali
3. La potenza dei due segnali
4. L'espressione, il grafico temporale e l'energia del segnale prodotto $z(t) = x(t) \cdot y(t)$
5. Lo spettro bilatero, lo spettro delle ampiezze e quello delle fasi del segnale somma $w(t) = x(t) + y(t)$
6. Il grafico del segnale $w(t)$ e il suo valore in $t = 1$
7. Il segnale convoluzione $v(\tau) = (x * y)(\tau)$

SOLUZIONE

1. La media temporale dei due segnali è 0 poiché i due segnali sono a durata limitata.
2. L'energia dei due segnali si può calcolare con la definizione di energia:

$$E_x = \int_{-1}^{+5} 1^2 dt = 6 \quad E_y = 2 \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t\right)^2 dt = 2 \left[\frac{1}{4} \frac{1}{3} t^3\right]_0^2 = \frac{1}{6} 8 = \frac{4}{3}$$

3. La potenza dei due segnali è 0 poiché i due segnali sono a durata limitata
4. L'espressione, il grafico temporale e l'energia del segnale prodotto $z(t) = x(t) \cdot y(t)$

$$z(t) = y(t) \text{ e dunque } E_z = E_y = \frac{4}{3}$$

5. Lo spettro bilatero, lo spettro delle ampiezze e quello delle fasi del segnale somma $w(t) = x(t) + y(t)$

$$\text{Lo spettro bilatero di } w(t) \text{ è } W(f) = X(f) + Y(f) = 6 \text{sinc}(6F) e^{-j2\pi f^2} + 2 \text{sinc}^2(2F) e^{-j2\pi f^2}$$

6. Il valore $w(1) = 1.5$
7. Il segnale convoluzione $v(\tau) = (x * y)(\tau)$

Quesito 2	Teoria della probabilità
------------------	---------------------------------

Un gruppo di amici organizza una gara ciclistica amatoriale di 100 km. Vince una consumazione al bar chi arriva entro un tempo massimo di 2.5 ore. Il 20% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che coloro che non sono allenati abbiano una probabilità del 70% di arrivare entro il tempo limite, mentre quelli allenati abbiano una probabilità pari al 95%.

1. Qual è la probabilità che uno degli amici scelto a caso nel gruppo arrivi entro il tempo limite?
2. Sapendo che Ciccio ha vinto la consumazione al bar, qual è la probabilità che appartenga al gruppo degli allenati?

SOLUZIONE

FA={ciclisti fuori allenamento}

A={ciclisti allenati}

NM={ciclisti che NON ARRIVANO entro il tempo limite}

M={ciclisti che ARRIVANO entro il tempo limite}

DATI

- $P_{FA}=0.20 \rightarrow P_A=0.70$
- $P_{M|FA}=0.70$
- $P_{M|A}=0.95$

$$P_M = P_{M|FA} \cdot P_{FA} + P_{M|A} \cdot P_A = 0.9$$

$$P_{A|M} = \frac{P_{M|A} \cdot P_A}{P_M} = 0.84$$

Quesito 3a	Trasmissione in banda base
-------------------	-----------------------------------

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Un segnale PAM ha espressione $s(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p(t-iT)$, dove $T = 9 \cdot 10^{-5}$ secondi è la durata dell'intervallo di simbolo, mentre a_i sono i simboli trasmessi, supposti appartenenti all'alfabeto $\{\pm 1\}$ in maniera equiprobabile. L'impulso elementare $p(t)$ ha trasformata di Fourier $P(f) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi fT/2}$. Si determini:

1. La funzione di autocorrelazione della sequenza di simboli trasmessi;
2. La densità spettrale di potenza del segnale trasmesso $s(t)$, e se ne disegni il grafico;

Supponendo poi di trasmettere il segnale su di un canale che introduce un'attenuazione di 18 dB e un rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$, con $N_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ V}^2/\text{Hz}$, calcolare:

3. L'energia per bit all'ingresso del ricevitore e la potenza di trasmissione.
4. La risposta all'impulso del filtro adattato
5. L'impulso all'uscita del filtro adattato
6. La probabilità di errore sul bit nel caso in cui si utilizzi a destinazione un filtro adattato

Supponendo invece di usare un filtro passa-basso al posto di quello adattato, calcolare

7. La banda del filtro passa-basso da dover utilizzare per ottenere la stessa probabilità di errore sul bit.

SOLUZIONE

Poiché l'impulso elementare ha spettro $P(f) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi fT/2}$, si ha che la sua espressione nel tempo è:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right).$$

Dalla forma dell'impulso elementare e dall'alfabeto vediamo inoltre che il codice di linea utilizzato è un NRZ polare.

1. La funzione di autocorrelazione della sequenza di simboli trasmessi è dunque quella dell'NRZ polare con $A=1$,

$$\text{cioè: } R(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

2. La densità spettrale di potenza del segnale trasmesso $s(t)$ è:

$$\mathcal{P}(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) e^{j2\pi k f T} = \frac{T^2 \operatorname{sinc}^2(fT) e^{-j2\pi fT/2}}{T} = T \operatorname{sinc}^2(fT) e^{-j2\pi fT/2};$$

Supponendo poi di trasmettere il segnale su di un canale che introduce un'attenuazione di 18 dB e un rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$, con $N_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ V}^2/\text{Hz}$, calcolare:

3. Calcoliamo prima l'energia di trasmissione per bit: $E_{b,tx} = 1^2 T = T$. Dunque l'energia in ingresso al trasmettitore

sarà: $E_{b,rx} = E_{b,tx} / \gamma_{lin}$, dove γ_{lin} è l'attenuazione di canale in scala lineare.

Questa si può ricavare come segue: $18 = 10 \log_{10} \gamma_{lin} \rightarrow \gamma_{lin} = 10^{1.8} = 63.1$

$$\text{Quindi abbiamo: } E_{b,rx} = E_{b,tx} / \gamma_{lin} = \frac{9 \cdot 10^{-5}}{63.1} = 1.426 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{La potenza in trasmissione è: } T_{tx} = E_{b,tx} \cdot R = T \frac{1}{T} = 1 \text{ W}$$

4. La risposta all'impulso del filtro adattato si ottiene ribaltando e traslando di T l'impulso elementare, e quindi coincide con lo stesso impulso

5. L'impulso all'uscita del filtro adattato è un impulso triangolare:

$$p_{OUT}(t) = E_{b,rx} \Lambda\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = 1.426 \cdot 10^{-6} \Lambda\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

6. La probabilità di errore sul bit nel caso in cui si utilizzi a destinazione un filtro adattato è:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{9\cdot 10^{-5}}{2\cdot 10^{-5}}}\right) = Q(3) = 1.35 \cdot 10^{-3}$$

Supponendo invece di usare un filtro passa-basso al posto di quello adattato, calcolare

7. Notiamo che in questo caso $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{(s_{01} - s_{02})^2}{4\sigma_0^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{N_0B}}\right)$. Imponiamo l'uguaglianza tra le probabilità di

$$\text{errore: } \frac{A^2}{N_0B} = \frac{2A^2T}{N_0} \rightarrow B = \frac{1}{2T} = 5.56 \text{ kHz.}$$

Quesito 3b Trasmissione in banda passante

Il segnale $m(t) = 5 \cdot \sin(2000 \cdot \pi t)$ viene modulato in fase con una sensibilità di fase $D_p = 1$ e con una portante a frequenza $f_c = 1 \text{ MHz}$ e ampiezza $A_c = 10$. In ricezione viene poi estratto con un filtro passa-banda ideale con funzione di

trasferimento $H(f) = \Pi\left(\frac{f - f_c}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_c}{B}\right)$. Calcolare:

1. L'espressione analitica e il grafico della fase istantanea del segnale modulato
2. Il valore della frequenza istantanea all'istante $\bar{t} = 1.3 \text{ s}$
3. La potenza del segnale modulato
4. La banda $B_{\geq 98}$, definita come la minima banda del filtro $H(f)$ affinché il segnale modulato filtrato abbia almeno il 98% della potenza della potenza del segnale modulato all'ingresso del filtro
5. La banda $B_{\geq 80}$, definita come la minima banda del filtro $H(f)$ affinché il segnale modulato filtrato abbia almeno il 80% della potenza della potenza del segnale modulato all'ingresso del filtro

SOLUZIONE

Dalla definizione del segnale modulante sappiamo che la sua ampiezza è $A_m = 5$. Quindi l'indice di modulazione di fase è $\beta_p = A_m \cdot D_p = 5 \cdot 1 = 5$

1. La fase istantanea del segnale modulato è:
 $\theta(t) = \beta_p \sin \omega_m t = m(t) = 5 \cdot \sin(2000 \cdot \pi t)$
2. La frequenza istantanea è definita come segue:

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t)$$

Quindi il suo valore all'istante $\bar{t} = 1.3 \text{ s}$ è: $f_i(t) = 1 \cdot 10^6 + \frac{1}{2\pi} \cdot 5 \cdot 2000 \cdot \pi \cdot \cos(2000 \cdot \pi t) = 1006.5 \text{ kHz}$

3. La potenza del segnale modulato è: $P = \frac{A_c^2}{2} = 50$
4. La banda $B_{\geq 98}$ coincide con la banda di Carson, cioè: $B_{\geq 98} = 2(\beta + 1)B_m = 2 \cdot 6 \cdot 1000 = 12 \text{ kHz}$
5. La banda $B_{\geq 80}$ può essere calcolata calcolando il contributo dei singoli impulsi di Dirac dello spettro del segnale modulato. Ricordiamo che tali impulsi hanno ampiezza

$$G_k = \frac{A_c}{2} J_k(\beta)$$

e sono centrati sulle frequenze

$$f_k = \{f_c + k f_m, f_c - k f_m, -f_c + k f_m, f_c - k f_m\}, \text{ per } k = 0, 1, 2, \dots$$

La generica componente k porta una potenza $P_k = \begin{cases} 2 \cdot G_k^2 & \text{se } k = 0 \\ 4 \cdot G_k^2 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$

Riportiamo allora i valori della potenza totale in funzione del numero di componenti che lasciamo passare:

k	P_k	$P_{tot} = \sum_{i=0}^k P_k$	B_k
0	1.5770	1.5770	0 kHz
1	10.731	12.308	2 kHz
2	0.21683	12.525	4 kHz

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

3	13.310	25.835	6 kHz
4	15.306	41.141	8 kHz
5	6.8194	47.961	10 kHz
6	1.7174	49.678	12 kHz

Tenendo conto che l'80% della potenza totale è $P_{80} = 40$, la banda minima cercata è $B_4 = 8$ kHz.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (8 punti)		
1)		0.5
2)		1
3)		1
4)		1
5)		1
6)		0.5
7)		3

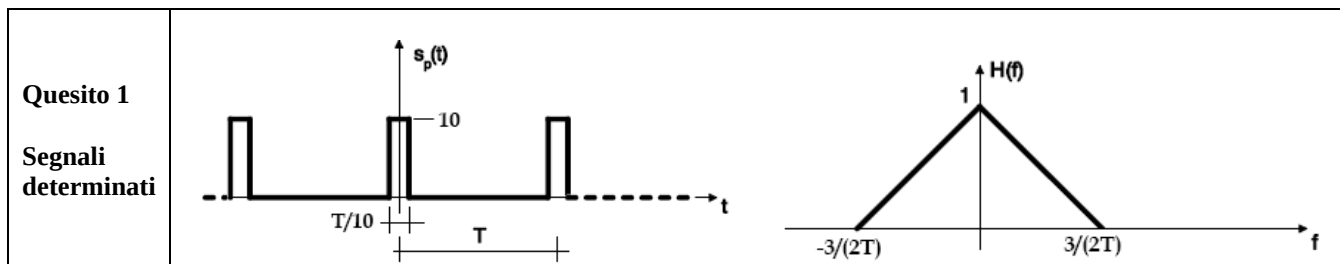
QUESITO 2 (10 punti)		
1)		3
2)		3

QUESITO 3a (6 punti)		
1)		1
2)		1
3)		2
4)		1
5)		1
6)		2
7)		2

QUESITO 3b (4 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1
5)		2

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=4$ $\text{MIN}(Q2)=4$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=6$

COMPITO 18 - 25 settembre 2007



Si consideri un segnale periodico $s_p(t)$ (periodo T) in ingresso ad un filtro con $H(f)$ del tipo riportato in figura. Si determini:

- 1) la media del segnale in ingresso $s_p(t)$
- 2) la potenza del segnale in ingresso $s_p(t)$
- 3) lo spettro bilatero del segnale in ingresso $s_p(t)$
- 4) la media del segnale all'uscita del filtro
- 5) l'energia del segnale all'uscita del filtro
- 6) la potenza del segnale all'uscita del filtro

SOLUZIONE (da calcolare)

- 1) la media del segnale in ingresso $s_p(t)$ è: $\langle s_p(t) \rangle = 10 \frac{T}{10} \frac{1}{T} = 1 \text{ V}$
- 2) la potenza del segnale in ingresso $s_p(t)$: $P_{s_p} = \langle |s_p(t)|^2 \rangle = 100 \frac{T}{10} \frac{1}{T} = 10 \text{ W}$
- 3) lo spettro bilatero del segnale in ingresso $s_p(t)$ è:

$$S_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nF), \text{ dove } c_n = F H(nF) = F \left[\mathfrak{F} \left\{ \Pi \left(\frac{t}{T/10} \right) \right\} \right]_{f=nF} = F \left[10 \frac{T}{10} \text{sinc} \left(\frac{T}{10} f \right) \right]_{f=nF} \rightarrow$$

$$c_n = \text{sinc} \left(\frac{n}{10} \right) \text{ e } F = \frac{1}{T}$$

All'uscita del filtro il segnale lo spettro del segnale sarà ottenuto moltiplicando:

- la componente a frequenza 0 per 1
- la componente fondamentale, a frequenza F , per $\frac{1}{3}$
- le altre componenti per 0

Quindi lo spettro del segnale all'uscita del filtro sarà:

$$S_{OUT}(f) = \delta(f) + \frac{1}{3} \text{sinc} \left(\frac{1}{10} \right) \delta(f - F) = \delta(f) + \frac{1}{3} 0.98363 \delta(f - F) \rightarrow$$

$$S_{OUT}(f) = \delta(f) + 0.32788 \delta(f - F) + 0.32788 \delta(f + F)$$

- 4) la media del segnale all'uscita del filtro è: $\langle s_{OUT}(t) \rangle = c_0^{(OUT)} = 1$
- 5) l'energia del segnale all'uscita del filtro è $E_{s_p} = +\infty$ perché il segnale di uscita è periodico
- 6) la potenza del segnale all'uscita del filtro, per il teorema di Parseval, è $P_{OUT} = 1^2 + 2 \cdot 0.32788^2 = 1.215$

Quesito 2	Variabili aleatorie
------------------	----------------------------

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} c x^{-(\lambda+1)} & x > R \\ 0 & x \leq R \end{cases}$, con $R = 2$ e $\lambda = 1.5$. Determinare:

- 1) la costante c tale che la funzione $f(x)$ risulti una funzione densità di probabilità;
- 2) la media della variabile aleatoria ξ descritta da $f(x)$;
- 3) la funzione di probabilità cumulativa $F(x)$ della variabile aleatoria ξ ;

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 4) la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $\eta = \ln \frac{\xi}{R}$

SOLUZIONE

- 1) la costante c tale che la funzione $f(x)$ risulti una funzione densità di probabilità si calcola imponendo che l'area

sotto la pdf sia unitaria: $\int_R^{+\infty} c x^{-(\lambda+1)} = \left[-c \frac{1}{\lambda+1} x^{-\lambda} \right]_R^{+\infty} = c \frac{1}{\lambda+1} R^{-\lambda} = 1 \rightarrow \boxed{c = (\lambda+1)R^\lambda = 7.07}$

- 2) la media della variabile aleatoria ξ descritta da $f(x)$ è:

$$E\{\xi\} = \int_R^{+\infty} x c x^{-(\lambda+1)} = c \int_R^{+\infty} x^{-\lambda} = \left[-c \frac{1}{\lambda} x^{-\lambda+1} \right]_R^{+\infty} = c \frac{1}{\lambda} R^{-\lambda+1} \rightarrow \boxed{E\{\xi\} = c \frac{1}{\lambda} R^{-\lambda+1} = 2.12 \frac{1}{0.5} 2^{0.5} = 6}$$

- 3) la funzione di probabilità cumulativa $F(x)$ della variabile aleatoria ξ è:

$$F(x) = \int_R^x c \sigma^{-(\lambda+1)} = \left[-c \frac{1}{\lambda+1} \sigma^{-\lambda} \right]_R^x = c \frac{1}{\lambda+1} (R^{-\lambda} - x^{-\lambda}) = 1 - 2.83 x^{-\lambda}$$

- 4) la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $\eta = \ln \frac{\xi}{R}$ è:

$$f_\eta(y) = f_\xi[g^{-1}(y)] \cdot \left| \frac{d g^{-1}(y)}{dy} \right|, \text{ dove } g^{-1}(y) = R e^y \rightarrow f_\eta(y) = \begin{cases} c (R e^y)^{-(\lambda+1)} R y e^y & x > R \\ 0 & x \leq R \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} c R^2 y e^{-\lambda y} & x > R \\ 0 & x \leq R \end{cases}$$

Quesito 3a | Trasmissione in banda base

Si consideri un sistema di trasmissione binario antipodale con velocità di trasmissione $R = 1/T = 1$ Mbit/s. Per la

trasmissione si utilizzano impulsi con spettro delle fasi lineare e modulo dato da: $|S(f)| = \begin{cases} 100 \sqrt{1-|f|T} & f \in \left[-\frac{1}{T}, +\frac{1}{T}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Il mezzo trasmissivo ha un'attenuazione di 20 dB (costante in frequenza) e introduce un rumore gaussiano bianco con

densità spettrale di potenza pari a $\frac{N_0}{2} = 1.11 \cdot 10^7$. Nel caso di utilizzo di un filtro adattato, calcolare:

- 1) l'energia per bit in trasmissione
- 2) la potenza del segnale in trasmissione
- 3) l'energia ricevuta per bit
- 4) la probabilità di errore sul bit

SOLUZIONE

Dato che $R = 1/T = 1$ Mbit/s $\rightarrow T = 1 \cdot 10^{-6}$ s.

- 1) l'energia per bit in trasmissione è $E_{b,tx} = \int_{-1/T}^{+1/T} |S(f)|^2 df = 100^2 \cdot 2 \cdot \int_0^{1/T} (1-fT) df = \frac{10^4}{T}$

- 2) la potenza del segnale in trasmissione è $P_{tx} = E_{b,tx} \cdot R = \frac{10^4}{T} \cdot \frac{1}{T}$

- 3) l'energia ricevuta per bit sarà $E_b = \frac{E_{b,tx}}{\alpha_{lin}} = \frac{10^4}{T} \frac{1}{100} = \frac{10^2}{10^{-6}} = 10^8$, dove $\alpha_{lin} = 10^{\alpha/10} = 10^{20/10} = 100$ è l'attenuazione di energia di canale in scala lineare.

- 4) la probabilità di errore sul bit è: $P_e = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2 \frac{10^8}{2.22 \cdot 10^7}}\right) = Q(\sqrt{9}) = 1.35 \cdot 10^{-3}$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Quesito 3b | Trasmissione in banda passante

Un canale di trasmissione si comporta in maniera lineare nell'intervallo di frequenze $B_H = [10, 40]$ MHz. Lo si vuole usare per trasmettere il maggior numero di segnali $s_i(t)$ che occupano in banda base una banda $B_1 = 10$ KHz, e che hanno media nulla e potenza unitaria. Supponendo che lo stesso canale debba supportare contemporaneamente anche la trasmissione di 100 segnali modulati FM con $\beta = 3$, e occupanti in banda base ciascuno una banda $B_2 = 20$ KHz, dire quanti segnali $s_i(t)$ possono essere al massimo trasmessi nei seguenti casi:

- 1) i segnali $s_i(t)$ vengono modulati con modulazione AM a banda laterale doppia e con portante
- 2) i segnali $s_i(t)$ vengono modulati con modulazione AM a banda laterale doppia e con portante soppressa
- 3) i segnali $s_i(t)$ vengono modulati con modulazione AM USSB
- 4) i segnali $s_i(t)$ vengono modulati con modulazione AM a banda laterale doppia e con portante, e la potenza massima di trasmissione complessiva non deve superare i 40 mW, supponendo che l'ampiezza della portante sia uguale per tutti i segnali, e pari a $A_c = 2$ mV. Motivare la risposta.

SOLUZIONE

Calcoliamo intanto la banda utilizzata da ciascun segnale modulato FM: $B_{FM,2} = 2(\beta + 1)B_2 = 160$ KHz.

Quindi la banda necessaria per trasmettere i 100 segnali FM è: $B_{FM}^{(TOT)} = 100 B_{FM,2} = 16$ MHz

La potenza media per trasmettere i 100 segnali FM sarà: $P_{FM}^{(TOT)} = 100 P_{FM,2} = 100 \frac{A_c^2}{2} = 100 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{2} = 20$ mW.

- 1) La banda occupata da ciascun segnale AM è: $B_{AM,1} = 2 \cdot 10 = 20$ kHz. Dato che la banda disponibile è

$$B_{Disp} = (40 - 10) - B_{FM}^{(TOT)} = 14 \text{ MHz, possiamo moltiplicare insieme } N_{AM} = \left\lceil \frac{B_{Disp}}{B_{AM,1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{14 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^3} \right\rceil = 700;$$

- 2) Nel caso di modulazione AM a banda laterale doppia e con portante soppressa, l'occupazione di banda è la stessa del punto precedente, e quindi

$$N_{AM,DSB-SC} = \left\lceil \frac{B_{Disp}}{B_{AM,1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{14 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^3} \right\rceil = 700;$$

- 3) Nel caso di modulazione AM USSB, l'occupazione di banda è la metà di quella dei punti precedenti, e quindi possiamo moltiplicare il doppio dei canali:

$$N_{AM,USSB} = \left\lceil 2 \frac{B_{Disp}}{B_{AM,1}} \right\rceil = \left\lceil 2 \frac{14 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^3} \right\rceil = 1400;$$

- 4) La potenza necessaria per trasmettere un segnale AM è: $P_{AM,1} = \frac{1}{2} A_c^2 (1 + P_{s_i}) = \frac{1}{2} 4 \cdot 10^{-6} (1 + 1) = 4 \cdot 10^{-6}$ W. Dato che 20 mW sono necessari per trasmettere i segnali FM, abbiamo a disposizione 20 mW per i segnali AM. Quindi

$$\text{possiamo trasmettere } N_{AM} = \min \left\{ 700, \frac{20 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-6}} \right\} = \min \{ 700, 5000 \} = 700.$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (8 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1
5)		2
6)		2

QUESITO 2 (10 punti)		
1)		1
2)		2
3)		3
4)		4

QUESITO 3a (6 punti)		
1)		2
2)		1
3)		1
4)		2

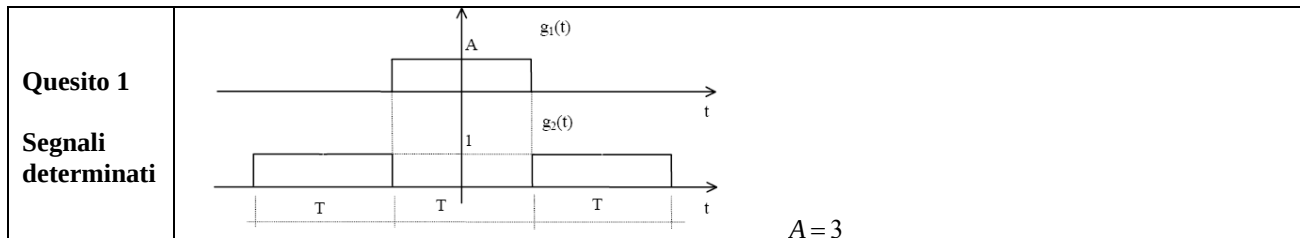
QUESITO 3b (4 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=4$ $\text{MIN}(Q2)=4$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=6$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 19 - 30 novembre 2007



Siano dati i due segnali di durata limitata $g_1(t)$ e $g_2(t)$ rappresentati in figura. Si calcoli:

- 1) La media temporale dei due segnali sull'intero asse dei tempi;
- 2) La media temporale dei due segnali nell'intervallo $[-1.5T, +1.5T]$;
- 3) L'espressione analitica, il grafico e lo spettro bilatero del segnale $g_s(t) = g_1(t) + g_2(t)$
- 4) L'espressione analitica, il grafico e lo spettro bilatero del segnale $g_p(t) = g_1(t) \cdot g_2(t)$
- 5) L'espressione analitica, il grafico e lo spettro bilatero del segnale convoluzione $g_u(\tau) = (g_1 * g_2)(\tau)$
- 6) L'espressione analitica, il grafico e lo spettro bilatero del segnale convoluzione $g_{cd}(\tau) = (g_1 * h)(\tau)$, dove $h(t)$ è un impulso di Dirac centrato in $\bar{t} = 8T$

SOLUZIONE

- 1) La media temporale dei due segnali sull'intero asse dei tempi;

$$\langle g_1(t) \rangle = 0 \text{ e } \langle g_2(t) \rangle = 0$$

- 2) La media temporale dei due segnali nell'intervallo $[-1.5T, +1.5T]$;

$$\langle g_1(t) \rangle_{[-1.5T, +1.5T]} = \frac{1}{3T} \int_{-1.5T}^{+1.5T} g_1(t) dt = \frac{1}{3T} AT = \frac{A}{3}$$

$$\langle g_2(t) \rangle_{[-1.5T, +1.5T]} = \frac{1}{3T} \int_{-1.5T}^{+1.5T} g_2(t) dt = \frac{1}{3T} 2T = \frac{2}{3}$$

- 3) L'espressione analitica, il grafico e lo spettro bilatero del segnale $g_s(t) = g_1(t) + g_2(t)$

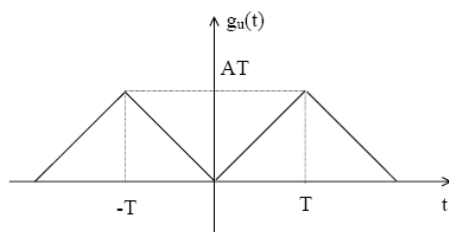
$$g_1(t) + g_2(t) = \Pi\left(\frac{t + \frac{3}{2}T}{T}\right) + A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) + \Pi\left(\frac{t - \frac{3}{2}T}{T}\right)$$

$$G_1(f) + G_2(f) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{j\pi/2 T} + AT \operatorname{sinc}(fT) + T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi/2 T}$$

- 4) L'espressione analitica, il grafico e lo spettro bilatero del segnale $g_p(t) = g_1(t) \cdot g_2(t)$

$$g_1(t) \cdot g_2(t) = 0 \quad G_1(f) \cdot G_2(f) = 0$$

- 5) L'espressione analitica, il grafico e lo spettro bilatero del segnale convoluzione $g_u(\tau) = (g_1 * g_2)(\tau)$



La trasformata di $g_u(t)$ vale

$$G_u(f) = AT^2 \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 (e^{j2\pi f T} + e^{-j2\pi f T}) = 2AT^2 \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 \cos(2\pi f T)$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 6) L'espressione analitica, il grafico e lo spettro bilatero del segnale convoluzione $g_{cd}(\tau) = (g_1 * h)(\tau)$, dove $h(t)$ è un impulso di Dirac centrato in $\bar{t} = 8T$

$$g_{cd}(\tau) = (g_1 * h)(\tau) = A \Pi\left(\frac{t-8T}{T}\right)$$

$$G_{cd}(f) = G_1(f) e^{-j8\pi f T}$$

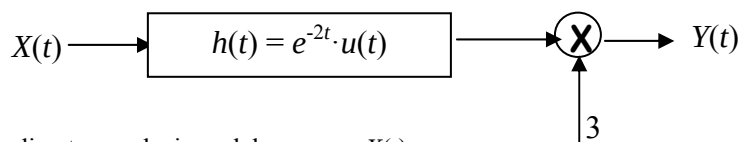
Quesito 2 Variabili aleatorie

Sia ξ una variabile aleatoria con densità di probabilità esponenziale unilatera e media pari a 2, e sia

$$g(x) = \Pi\left(\frac{x-2}{4}\right) + \Pi\left(\frac{x-2}{2}\right). \text{ Calcolare:}$$

- 1) La densità di probabilità $f_\eta(y)$ della variabile aleatoria $\eta = g(\xi)$
- 2) La media della variabile aleatoria η .

Si considerino poi il processo parametrico $X(t) = \eta \cdot \sin(200\pi t)$ ed il processo $Y(t)$ ottenuto da $X(t)$ attraverso la trasformazione indicata in figura:



Calcolare:

- 3) Media e funzione di autocorrelazione del processo $X(t)$;
- 4) Media e funzione di autocorrelazione del processo $Y(t)$;

SOLUZIONE

- 1) La densità di probabilità $f_\eta(y)$ della variabile aleatoria $\eta = g(\xi)$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} u(x)$$

Dato che la η può assumere solo i valori 0, 1 e 2, la sua pdf si può ricavare così:

$$f_\eta(y) = \left[\int_4^{+\infty} f_\xi(x) dx \right] \delta(x) + \left[\int_0^1 f_\xi(x) dx + \int_3^4 f_\xi(x) dx \right] \delta(x-1) + \left[\int_1^3 f_\xi(x) dx \right] \delta(x-2) =$$

$$= e^{-2} \delta(x) + (1 - e^{-1/2} + e^{-3/2} - e^{-2}) \delta(x-1) + (e^{-1/2} - e^{-3/2}) \delta(x-2)$$

- 2) La media della variabile aleatoria η .

$$E\{\eta\} = 1 + e^{-1/2} - e^{-3/2} - e^{-2}$$

- 3) Media e funzione di autocorrelazione del processo $X(t)$;

$$X(t) = \eta \cdot \sin(200\pi t)$$

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \cdot \sin(200\pi t) f_\eta(y) dy = E\{\eta\} \sin(200\pi t) = (1 + e^{-1/2} - e^{-3/2} - e^{-2}) \sin(200\pi t)$$

$$R_{xx}(\tau) = E\{X(t_1) X(t_2)\} = E\{\eta^2\} \sin(200\pi t_1) \sin(200\pi t_2) = (1 + 3e^{-1/2} - 3e^{-3/2} - e^{-2}) \sin(200\pi t_1) \sin(200\pi t_2)$$

- 4) Media e funzione di autocorrelazione del processo $Y(t)$;

$$E\{Y(t)\} = E\{X(t)\} H(0) =$$

$$R_{yy}(\tau) = \mathfrak{T}^{-1}\{S_y(f)\} = \mathfrak{T}^{-1}\{S_x(f) |H(f)|^2\}$$

Le relazioni sopra non si possono usare perchè $X(t)$ non è stazionario in senso lato.

Siccome il processo parametrico (per di più discreto), basta calcolare la generica espressione della realizzazione di uscita (come se $X(t)$ fosse un segnale deterministico e η un parametro).

Così facendo si trova:

$$Y(t) = \eta \left[\frac{1}{4 + 40000\pi^2} (2 \sin(200\pi t) - 200\pi \cos(200\pi t)) \right]$$

Indichiamo brevemente:

$$Y(t) = \eta \cdot g(t)$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Da cui:

$$E\{Y(t)\} = (1 + e^{-1/2} - e^{-3/2} - e^{-2})g(t)$$

$$R_{YY}(\tau) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = (1 + 3e^{-1/2} - 3e^{-3/2} - e^{-2})g(t_1)g(t_2)$$

Quesito 3a	Trasmissione in banda base
-------------------	-----------------------------------

Si consideri il segnale $x(t) = B \text{sinc}^2(Bt) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ con $B = 100000$ ed $f_0 = 450$ KHz. Si supponga di volerlo convertire in PCM con quantizzazione uniforme mantenendo un rapporto segnale rumore di quantizzazione medio pari almeno a 35 dB. Calcolare:

- 1) la minima frequenza di campionamento utilizzabile;
- 2) l'errore massimo di quantizzazione (assumere simmetrica la dinamica di $x(t)$);
- 3) la minima banda necessaria per trasmettere il segnale con codifica binaria NRZ;
- 4) i parametri del filtro di Nyquist da utilizzare nel caso si disponga di una banda con ampiezza del 10% superiore a quella calcolata al punto 3).
- 5) nell'ipotesi di mantenere lo stesso rapporto segnale rumore di quantizzazione e di utilizzare una codifica multilivello, (calcolare) la banda minima necessaria e il numero di livelli se si vuole un rapporto segnale rumore all'ingresso del ricevitore di 12 dB.

SOLUZIONE

- 1) Lo spettro di $x(t) = B \text{sinc}^2(Bt) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ è $X(f) = \frac{1}{2} \Lambda\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \frac{1}{2} \Lambda\left(\frac{f+f_0}{B}\right)$.

CONSIDERANDO IL SEGNALE IN BANDA BASE:

Quindi la banda del segnale è: $B_x = f_0 + B = 550$ KHz $\rightarrow f_s = 2 \cdot B_x = 2 \cdot 550$ KHz = 1.1 MHz

CONSIDERANDO IL SEGNALE IN BANDA PASSANTE:

Quindi la banda del segnale è: $f_s = \frac{2 \cdot f_{\max}}{\left[\frac{f_{\max}}{B}\right]} = \frac{2 \cdot 550}{5}$ KHz = 220 KHz

DA ORA IN POI USIAMO IL RISULTATO OTTENUTO CONSIDERANDO IL SEGNALE IN BANDA BASE

- 2) Per ottenere un rumore max di quantizzazione di 35 dB, dalla regola dei 6 dB otteniamo:
 $35 = 6n \rightarrow n = \left\lceil \frac{35}{6} \right\rceil = 6$. E quindi l'errore massimo di quantizzazione è: 1562.5
- 3) la minima banda necessaria per trasmettere il segnale con codifica binaria NRZ è
 $b_{\min} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} n f_s = \frac{1}{2} n f_s = \frac{1}{2} 6 \cdot 1100$ KHz = 1,32 MHz;
- 4) imponiamo $f_{\Delta} = 10\% \cdot 1.32 \cdot 10^6 = 1.32 \cdot 10^5 \rightarrow F_0 = b_{\min} = 1.32 \cdot 10^6$ $r = \frac{f_{\Delta}}{F_0} = \frac{f_{\Delta}}{b_{\min}} = \frac{1.32 \cdot 10^5}{1.32 \cdot 10^6} = 0.1$
- 5) Vogliamo un rapporto segnale rumore all'ingresso del ricevitore di 12 dB, pari a $10^{12/10} = 15.849$ in scala lineare. Dalla formula di Shannon, la banda minima necessaria per mantenere una bit rate $R = n f_s = 1.32$ MHz è:

$$banda_{\min} = \frac{R}{\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)} = R \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{S}{N}\right)} = 1.32 \cdot 10^6 \frac{0.69}{2.82} \approx 323$$
 KHz

Quesito 3b	Trasmissione in banda passante
-------------------	---------------------------------------

In un sistema di comunicazione televisiva la potenza del trasmettitore è di 40 kW, l'attenuazione del canale è di 80 dB, e la densità spettrale bilatera di potenza del rumore è di $N_0/2 = 10^{-10}$ W/Hz. Il segnale in banda base ha una larghezza di banda di 10 KHz. Calcolare il rapporto segnale rumore all'ingresso del demodulatore, dopo il filtro di ricezione:

- 1) per la modulazione AM
- 2) per la modulazione AM DSB-SC
- 3) per la modulazione AM SSB

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Calcolare inoltre il rapporto segnale rumore all'uscita del demodulatore, nel caso in cui il segnale originale abbia una potenza media $S_x = 0.2$, e viene modulato con indice di modulazione $m = 0.85$

- 1) per la modulazione AM
- 2) per la modulazione AM DSB-SC
- 3) per la modulazione AM SSB

[SUGGERIMENTO: per il calcolo della potenza del segnale modulante, tenere conto della relazione tra segnale modulante e segnale originale, $m(t) = m \cdot x(t)$, dove $m(t)$ è il segnale modulante, m è l'indice di modulazione, e $x(t)$ è il segnale originale]

SOLUZIONE

(a) Dato che l'attenuazione del canale è 80dB

$$10 \log \frac{P_T}{P_R} = 80 \implies P_R = 10^{-8} P_T = 10^{-8} \times 40 \times 10^3 = 4 \times 10^{-4} \text{ W}$$

Se il filtro d'ingresso ha una larghezza di banda B la potenza del rumore all'ingresso del demodulatore sarà

$$P_n = 2 \int_{f_c - \frac{B}{2}}^{f_c + \frac{B}{2}} \frac{N_0}{2} df = N_0 B = 2 \times 10^{-10} B \text{ Watts}$$

Nel caso di modulazione DSB e AM sarà $B = 2W = 2 \times 10^4 \text{ Hz}$, mentre nel caso di modulazione SSB sarà $B = W = 10^4$. Quindi, il rapporto segnale rumore per la modulazione DSB e AM all'ingresso del demodulatore sarà

$$\text{SNR}_{\text{DSB,AM}} = \frac{P_R}{P_n} = \frac{4 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-10} \times 2 \times 10^4} = 10^2$$

e nel caso di modulazione SSB

$$\text{SNR}_{\text{SSB}} = \frac{4 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-10} \times 10^4} = 2 \times 10^2$$

(b) Per la modulazione DSB il guadagno del demodulatore è 2, quindi

$$\text{SNR}_{\text{DSB,o}} = 2 \text{SNR}_{\text{DSB,i}} = 2 \times 10^2 = 200$$

(c) Per la modulazione SSB il guadagno del demodulatore è 1, quindi

$$\text{SNR}_{\text{SSB,o}} = \text{SNR}_{\text{SSB,i}} = 2 \times 10^2 = 200$$

Nel caso di modulazione AM con $m = 0.8$ e $S_x = 0.2$, si avrà

$$\text{SNR}_{\text{AM,o}} = \frac{m^2 S_x}{1 + m^2 S_x} \text{SNR}_{\text{AM,i}} = 0.1135 \times 2 \times 10^2 = 22.7$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (10 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1
5)		3
6)		3

QUESITO 2 (10 punti)		
1)		3
2)		2
3)		3
4)		2

QUESITO 3a (6 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		1
5)		2
		2

QUESITO 3b (4 punti)		
1)		1
2)		0.5
3)		0.5
4)		1
5)		0.5
6)		0.5

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=4$ $\text{MIN}(Q2)=4$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=6$

COMPITO 20 - 29 gennaio 2008

Quesito 1	Segnali determinati (7 punti + 4)
Siano dati i due segnali $s_1(t) = 5 \cdot \text{sinc}(2t)$ e $s_2(t) = \text{sinc}(3t)$. Calcolare:	
7) Lo spettro bilatero, lo spettro delle ampiezze e quello delle fasi dei due segnali;	(1 pt)
8) L'energia dei due segnali	(2 pt)
9) Il grafico temporale del segnale $y(t) = \text{sgn}\{s_1(t) \cdot s_2(t)\}$	(2 pt)
10) Dire se il segnale $y(t)$ è periodico ed eventualmente calcolarne il periodo	(2 pt)
11) Lo spettro delle ampiezze del segnale $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$	(facoltativo) (2 pt)
12) L'energia del segnale $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$	(facoltativo) (2 pt)

SOLUZIONE

- 1) Lo spettro bilatero, lo spettro delle ampiezze e quello delle fasi dei due segnali; (1 pt)

$$S_1(f) = \frac{5}{2} \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \quad |S_1(f)| = \frac{5}{2} \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \quad \text{fase}(S_1(f)) = 0$$

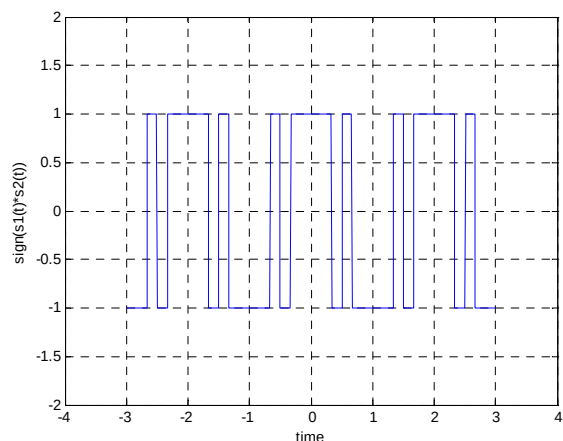
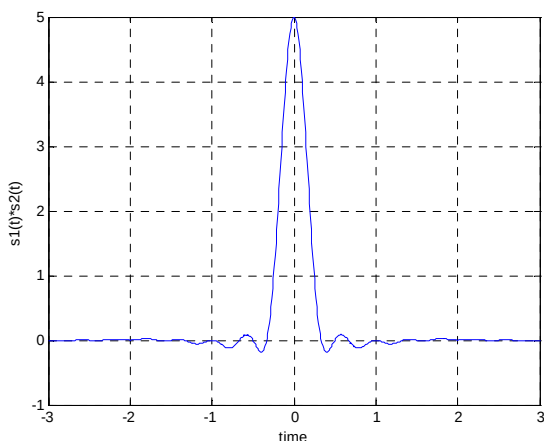
$$S_2(f) = \frac{1}{3} \Pi\left(\frac{f}{3}\right) \quad |S_2(f)| = \frac{1}{3} \Pi\left(\frac{f}{3}\right) \quad \text{fase}(S_2(f)) = 0$$

- 2) L'energia dei due segnali (2 pt)

$$E_{S_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(f)|^2 df = \frac{25}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f}{2}\right) df = \frac{25}{4} 2 = \frac{25}{2}$$

$$E_{S_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_2(f)|^2 df = \frac{1}{9} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{f}{3}\right) df = \frac{1}{9} 3 = \frac{1}{3}$$

- 3) Il grafico temporale del segnale $y(t) = \text{sgn}\{s_1(t) \cdot s_2(t)\}$ (2 pt)



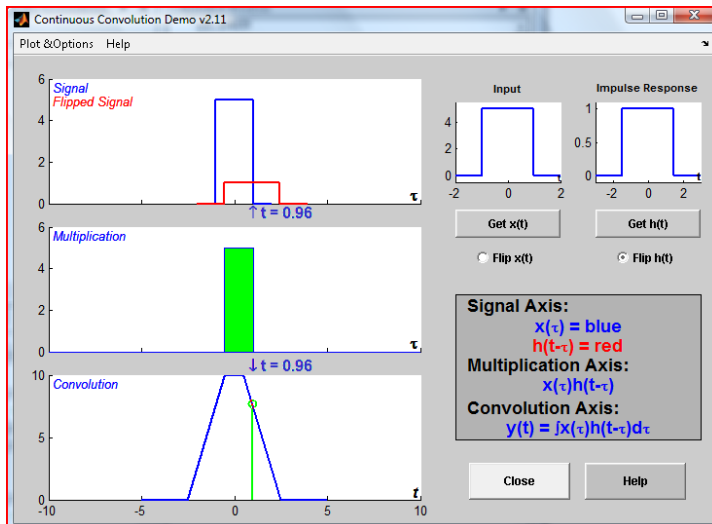
- 4) Dire se il segnale $y(t)$ è periodico ed eventualmente calcolarne il periodo (2 pt)

No, non è periodico

- 5) Lo spettro delle ampiezze del segnale $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$ (facoltativo) (2 pt)

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra



6) L'energia del segnale $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$

(facoltativo)

(2 pt)

$$E_s = 2 \int_0^{2.5} [10^2 df + 2 \int_{-1}^0 \left(\frac{10}{2} f + 10 \right) df] df = 2 \cdot 100 \cdot 0.5 + 2 \int_{-1}^0 \left(\frac{100}{4} f^2 + 100 + 100 f \right) df =$$

$$= 100 + 2 \left[\frac{100}{12} f^3 + 100 f + \frac{100}{2} f^2 \right]_{-1}^0 = 100 - 2 \left(-\frac{100}{12} - 100 \cdot 2 + \frac{100}{2} \cdot 4 \right) = 100 + \frac{100}{3} + 400 - 200 = \frac{800}{3} = 266.67$$

Quesito 2 Variabili aleatorie (5 punti + 4)

Un canale digitale binario ha una probabilità di errore complessiva $P_e = 10^{-4}$. Sapendo che dato per certo di trasmettere il bit 1, la probabilità di errore (ricezione bit 0) è $5 \cdot 10^{-5}$, mentre dato per certo di trasmettere il bit 0 la probabilità di errore (ricezione bit 1) è $1.75 \cdot 10^{-4}$, calcolare:

1) la probabilità p_1 che venga trasmesso il bit 1 [sugg.: la probabilità di trasmettere il bit 0 è: $1 - p_1$] (2 pt)

Si considerino la variabile aleatoria ξ la cui densità di probabilità ha l'espressione $f_\xi(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}} u(x) + p_1 \delta(x)$, e la variabile aleatoria $\eta = g(\xi)$, con $g(x) = (x-1) \cdot u(x-1)$ (essendo $u(x)$ il gradino unitario). Calcolare:

2) il valore di λ affinché $f_\xi(x)$ sia una funzione densità di probabilità; (3 pt)

3) l'espressione della densità di probabilità $f_\eta(y)$; (facoltativo) (2 pt)

4) la media della variabile aleatoria η (facoltativo) (2 pt)

SOLUZIONE

1) Si commette errore se:

a) si riceve 0 dato per certo che si è trasmesso 1, con probabilità $p_{(1 \rightarrow 0)}$

b) si riceve 1 dato per certo che si è trasmesso 0, con probabilità $p_{(0 \rightarrow 1)}$

Allora, per il teorema della probabilità totale abbiamo:

$$P_{\text{errore}} = p_{(1 \rightarrow 0)} \cdot \text{prob}(\text{trasmettere 1}) + p_{(0 \rightarrow 1)} \cdot \text{prob}(\text{trasmettere 0})$$

Da cui, tenendo conto che: $\text{prob}(\text{trasmettere 0}) = 1 - \text{prob}(\text{trasmettere 1})$

$$\text{prob}(\text{trasmettere 1}) = [P_{\text{errore}} - p_{(0 \rightarrow 1)}] / [p_{(1 \rightarrow 0)} - p_{(0 \rightarrow 1)}]$$

E dunque:

$$\text{prob}(\text{trasmettere 1}) = [10^{-4} - 1.75 \cdot 10^{-4}] / [5 \cdot 10^{-5} - 1.75 \cdot 10^{-4}]$$

$$P_1 = 0.6$$

2) $\lambda = 0.4$

3) $[p_1 + \lambda(1 - \exp(-1/\lambda))] \cdot \delta(y) + \exp(-(y+1)/\lambda) \cdot u(y) = 0.967 \cdot \delta(y) + \exp(-2.5(y+1)) \cdot u(y)$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

4) 0.013

Quesito 3a	Trasmissione in banda base (8 punti)
-------------------	---

Si vuole trasmettere il segnale $x(t) = 5 \text{sinc}(2000 t)$, trasformandolo prima in PCM, e poi trasmetterlo attraverso un canale rumoroso che introduce un errore sul bit con probabilità pari a $P_e = 8 \cdot 10^{-4}$, e che si comporta in frequenza come un filtro passa-basso la cui parte ideale ha un'ampiezza $B_c = 4$ kHz. Calcolare:

- 1) $X(f)$, spettro delle ampiezze di $x(t)$ (1 pt)
- 2) la banda di guardia B_G se lo si campiona con un periodo di campionamento $T_s = 250 \mu\text{s}$; (2 pt)
- 3) il numero di bit da utilizzare per parola di codice se si vuole a destinazione un rapporto segnale rumore medio $(S/N)_{OUT} = 12$ dB; (2 pt)
- 4) la banda minima di canale necessaria per trasmettere il segnale senza ISI se i bit vengono formattati con impulsi a seno cardinale con un codice di linea unipolare NRZ (1 pt)
- 5) la banda minima di canale necessaria per trasmettere il segnale senza ISI se i bit vengono formattati con impulsi a coseno rialzato con coefficiente di roll-off $r = 0.7$ con un codice di linea unipolare NRZ (2 pt)

SOLUZIONE

- 1) $X(f)$, spettro delle ampiezze di $x(t)$

$$X(f) = \frac{1}{400} \Pi\left(\frac{f}{2000}\right)$$

- 2) la banda di guardia B_G se lo si campiona con un periodo di campionamento $T_s = 250 \mu\text{s}$;

$$B_x = 1000 \rightarrow f_c = 2B_x + B_G \rightarrow f_c = 2B_x + B_G = \frac{1}{250 \cdot 10^{-6}} - 2000 = 4000 - 2000 = 2000 \text{ Hz}$$

- 3) il numero di bit da utilizzare per parola di codice se si vuole a destinazione un rapporto segnale rumore medio $(S/N)_{OUT} = 12$ dB;

$$(S/N)_{OUT,lin} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \rightarrow M^2 = 16,64 \rightarrow n = \lceil \log_2 \sqrt{16,64} \rceil = 3$$

- 4) la banda minima di canale necessaria per trasmettere il segnale senza ISI se i bit vengono formattati con impulsi a seno cardinale con un codice di linea unipolare NRZ

$$B_{min,C} = \frac{1}{2} n f_c = \frac{3}{2} 2000 = 3 \text{ kHz}$$

- 5) la banda minima di canale necessaria per trasmettere il segnale senza ISI se i bit vengono formattati con impulsi a coseno rialzato con coefficiente di roll-off $r = 0.7$ con un codice di linea unipolare NRZ

$$B_{r=0.6,C} = \frac{1+r}{2} R = \frac{1+r}{2} n f_c = \frac{1.6}{2} 3 \cdot 2000 = 4.8 \text{ kHz}$$

Quesito 3b	Trasmissione in banda passante (10 punti)
-------------------	--

Si consideri il segnale $m(t) = 2\cos(20000\pi t)$ e si supponga di volerlo modulare con modulazione DSB-SC mediante una portante di ampiezza pari a 0.6 V. Supponendo di avere a disposizione un canale con banda passante pari a 200 kHz che introduce un rumore additivo gaussiano con densità spettrale di potenza costante e pari a $N_0/2 = 0.1 \mu\text{W/Hz}$ (assumere attenuazione unitaria), ed in cui la potenza massima in ingresso non può essere superiore a 3 W, calcolare:

- 1) il numero massimo di segnali $m(t)$ che possono essere modulati insieme nel canale; (3 pt)

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 2) il rapporto segnale rumore all'uscita del demodulatore per ogni singolo segnale $m(t)$; (2 pt)

Nell'ipotesi in cui, volendo mantenere lo stesso rapporto segnale rumore di cui al punto 2, ma utilizzando modulazione FM per ogni segnale $m(t)$, calcolare:

- 3) l'indice di modulazione β da utilizzare; (2 pt)
- 4) il numero massimo di segnali $m(t)$ che possono essere modulati FM insieme nel canale. (3 pt)

SOLUZIONE

- 1) 8 segnali AM (limite in potenza)
- 2) $S/N = 180$
- 3) $\beta = 1.15$
- 4) 4 segnali FM (limite in banda)

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (7 punti + 4)		
1)		1
2)		2
3)		2
4)		2
5)		2
6)		2

QUESITO 2 (5 punti + 4)		
1)		2
2)		3
3)		2
4)		2

QUESITO 3a (8 punti)		
1)		1
2)		2
3)		2
4)		1
5)		2

QUESITO 3b (10 punti)		
1)		3
2)		2
3)		2
4)		3

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=5$ $\text{MIN}(Q2)=4$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=5$

COMPITO 21 - 20 febbraio 2008

Quesito 1	Segnali determinati	8 punti
------------------	----------------------------	----------------

Il segnale $x(t) = 2 f_0 \operatorname{sinc}^2(f_0 t)$ viene prima moltiplicato per il segnale $y(t) = \cos(6\pi f_0 t)$, ottenendo il segnale $z(t) = x(t) \cdot y(t)$. Il segnale $z(t)$ viene poi campionato idealmente con passo di campionamento $T_c = 1/(4 f_0)$, ottenendo il segnale $z_c(t)$, e infine filtrato con un filtro di ricostruzione a coseno rialzato con coefficiente di roll-off pari a $r = 0.2$ e banda $B_F = 3 f_0$. Calcolare:

- 1) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale $x(t)$
- 2) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale $y(t)$
- 3) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale $z(t)$
- 4) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale $z_c(t)$
- 5) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale ricostruito, $\hat{z}(t)$
- 6) L'espressione analitica nel dominio del tempo del segnale $\hat{z}(t)$

SOLUZIONE

- 1) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale $x(t)$

$$|X(f)| = 2 \Lambda\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

- 2) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale $y(t)$

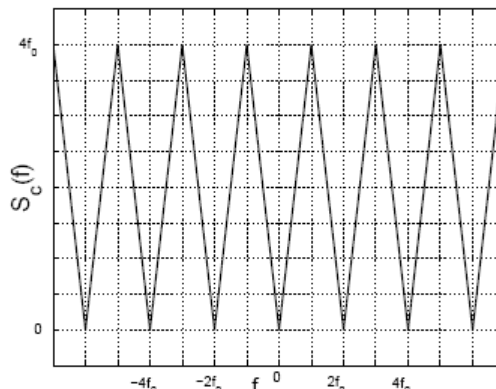
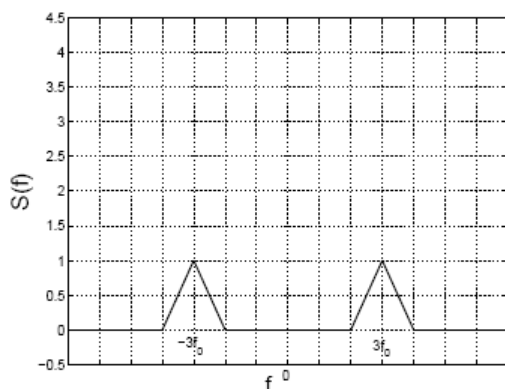
$$|Y(f)| = \frac{1}{2} [\delta(f - 3 f_0) + \delta(f + 3 f_0)]$$

- 3) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale $z(t)$

$$|Z(f)| = \Lambda\left(\frac{f}{f_0}\right) \otimes [\delta(f - 3 f_0) + \delta(f + 3 f_0)] = \Lambda\left(\frac{f - 3 f_0}{f_0}\right) + \Lambda\left(\frac{f + 3 f_0}{f_0}\right)$$

- 4) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale $z_c(t)$

$$|Z_c(f)| = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |Z(f - n f_c)| = 4 f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\Lambda\left(\frac{f - 3 f_0 - 4 n f_0}{f_0}\right) + \Lambda\left(\frac{f + 3 f_0 - 4 n f_0}{f_0}\right) \right]$$



Dalla figura si può vedere che si può scrivere anche nel seguente modo:

$$|Z_c(f)| = 4 f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{f - f_0 - 2 n f_0}{f_0}\right)$$

- 5) L'espressione analitica e il grafico dello spettro delle ampiezze del segnale ricostruito, $\hat{z}(t)$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Il filtro a coseno rialzato è caratterizzato da: $r f f_0 = B_z - f f_0 \rightarrow f f_0 = \frac{B_z}{1+r} = \frac{3 f_0}{1.2} = 2.5 f_0$

$$f f_\Delta = B_z - f f_0 = 0.5 f_0$$

Quindi la sua espressione è:

$$H_e(f) = \begin{cases} 1 & |f| < 2 f_0 \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi |f| - f_1}{2 f_\Delta} \right] \right\} & 2 f_0 < |f| < 3 f_0 \\ 0 & |f| > 3 f_0 \end{cases}$$

E quindi il segnale dopo il filtro a coseno rialzato è:

$$|\hat{Z}_c(f)| = |Z_c(f) \cdot H_e(f)| = \begin{cases} 4 f_0 \left[\Lambda \left(\frac{f - f_0}{f_0} \right) + \Lambda \left(\frac{f + f_0}{f_0} \right) \right] & |f| < 2 f_0 \\ 2 f_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi |f| - 2 f_0}{f_0} \right] \right\} \Lambda \left(\frac{|f| - 3 f_0}{f_0} \right) & 2 f_0 < |f| < 3 f_0 \\ 0 & |f| > 3 f_0 \end{cases}$$

A causa della presenza di segnale distorto nell'intervallo $[2 f_0, 3 f_0]$, il filtro di ricostruzione a cos rialzato in questo caso non è utilizzabile.

6) L'espressione analitica nel dominio del tempo del segnale $\hat{z}(t)$

Dato che il segnale è distorto, il segnale ricostruito non coincide con quello originale, ed è di difficile espressione analitica.

Quesito 2	Variabili aleatorie	8 punti
------------------	----------------------------	----------------

Su due facce di un dado è stampato il **numero 1**, su una faccia il **numero 2**, e su tre facce il **numero 4**. Si indichi con X la variabile aleatoria corrispondente al risultato di un lancio del dado.

- 1) Calcolare la densità di probabilità $f_x(x)$ della variabile aleatoria X
- 2) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria X
- 3) Calcolare la probabilità che, su 10 lanci del dado, esca almeno per 4 volte il numero 1
- 4) Calcolare la densità di probabilità $f_y(y)$ della variabile aleatoria Y data dal prodotto del risultato di due lanci indipendenti.

SOLUZIONE

- 1) Calcolare la densità di probabilità $f_x(x)$ della variabile aleatoria X

$$\Pr(X = 1) = 1/3$$

$$\Pr(X = 2) = 1/6$$

$$\Pr(X = 4) = 1/2$$

E quindi:

$$f_x(x) = \frac{1}{3} \delta(x-1) + \frac{1}{6} \delta(x-2) + \frac{1}{2} \delta(x-4)$$

- 2) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria X

$$E(X) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{2} = \frac{8}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 16 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 8 = 9$$

$$\text{var}_x = 9 - \left(\frac{8}{3} \right)^2 = \frac{17}{9}$$

- 3) Calcolare la probabilità che, su 10 lanci del dado, esca almeno per 4 volte il numero 1

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

$$P = \sum_{k=4}^{10} B_{k,10} \left(p = \frac{1}{3} \right) = 1 - \sum_{k=0}^3 B_{k,10} \left(p = \frac{1}{3} \right) = 1 - \sum_{k=0}^3 \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3} \right)^k \left(\frac{2}{3} \right)^{(10-k)}$$

- 4) Calcolare la densità di probabilità $f_Y(y)$ della variabile aleatoria Y data dal prodotto del risultato di due lanci indipendenti.

$$\Pr(\text{prod} = 1) = \Pr([1,1]) = 1/3 * 1/3 = 1/9$$

$$\Pr(\text{prod} = 2) = \Pr([1,2] \cup [2,1]) = 1/3 * 1/6 + 1/6 * 1/3 = 1/9$$

$$\Pr(\text{prod} = 4) = \Pr([1,4] \cup [4,1] \cup [2,2]) = 1/3 * 1/2 + 1/3 * 1/2 + 1/6 * 1/6 = 13/36$$

$$\Pr(\text{prod} = 8) = \Pr([2,4] \cup [4,2]) = 1/6 * 1/2 + 1/6 * 1/2 = 1/6$$

$$\Pr(\text{prod} = 16) = \Pr([4,4]) = 1/2 * 1/2 = 1/4$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{9} \delta(y-1) + \frac{1}{9} \delta(y-2) + \frac{13}{36} \delta(y-4) + \frac{1}{6} \delta(y-8) + \frac{1}{4} \delta(y-16)$$

Quesito 3a Trasmissione in banda base (5 punti + 3)

Il segnale $4[\text{sinc}^2(Ht) - \text{sinc}^2(H(t-1))]\cdot \cos(2\pi 100Ht)$ deve essere campionato, convertito in PCM e trasmesso su un canale avente comportamento ideale nella banda $[0, 100]$ kHz. Assumendo $H = 10$ kHz e quantizzazione uniforme, calcolare sia nel caso di trasmissione di tipo NRZ unipolare che nel caso di trasmissione RZ unipolare con impulso formattatore di tipo rettangolare:

- 1) Il massimo rapporto segnale rumore di quantizzazione medio in trasmissione se si utilizza un impulso formattatore di tipo rettangolare.
- 2) L'errore massimo di quantizzazione sul singolo campione se si utilizza un impulso formattatore rettangolare.
- 3) Progettare il filtro di Nyquist più economico che massimizzi il rapporto segnale rumore di quantizzazione medio in trasmissione (sia per RZ che per NRZ).
- 4) **[FACOLTATIVO]** Progettare il sistema multilivello (numero di livelli e filtro di Nyquist) che permetta al sistema RZ di avere almeno le stesse prestazioni del sistema NRZ in termini di rapporto segnale rumore di quantizzazione in trasmissione.

SOLUZIONE

- 1) La banda del segnale è 20 kHz nel range tra 990 e 1010 kHz. Il segnale è in banda passante quindi per il calcolo della frequenza di campionamento occorre usare la relazione:

$$f_c = \frac{2 f_{\max}}{\left\lfloor \frac{f_{\max}}{B} \right\rfloor} = \frac{202}{5} = 40.4 \text{ kHz}$$

dove il simbolo $\lfloor * \rfloor$ al denominatore indica la parte intera del numero decimale.

Visto che si utilizzano impulsi rettangolari la banda del segnale PCM vale $B_{NRZ} = n f_c$ e $B_{RZ} = 2 n f_c$.

Imponendo allora che la banda occupata dal segnale digitale (NRZ o RZ) sia pari a quella del canale, $B_{Canale} = 100$ kHz, si ricava che il numero di bit che si possono utilizzare al più sono $n = 2$ per la NRZ ed $n=1$ per la codifica RZ.

I corrispondenti rapporti segnale-rumore di quantizzazione medio valgono:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{Q,NRZ} = (2^2)^2 = 16 \quad ; \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{Q,RZ} = (2^1)^2 = 4$$

- 2) Dall'andamento temporale del segnale si può osservare che la sua dinamica è compresa tra -4 e 4 Volt, per cui l'errore massimo di quantizzazione vale:

$$e_{Q,NRZ} = \frac{V_{pp}}{2M} = 1 \text{ V} \quad ; \quad e_{Q,RZ} = \frac{V_{pp}}{2M} = 2 \text{ V}$$

- 3) Se non si è costretti ad utilizzare impulsi rettangolari, ma si può utilizzare impulsi a coseno rialzato, probabilmente il risparmio di banda che ne consegue potrà essere utilizzato per aumentare il numero di bit in fase

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

di codifica. Per stabilirlo ci mettiamo nelle condizioni migliori (impulso sinc) e valutiamo quale sarebbe il numero di bit utilizzabile in queste condizioni.

Se si utilizza sinc la banda del segnale PCM vale $B_{NRZ} = \frac{1}{2}nf_c$ e $B_{RZ} = nf_c$ da cui si ricava che il numero di bit che si possono utilizzare al più sono $n = 4$ per la NRZ ed $n=2$ per la codifica RZ.

Utilizzando questi valori di n la banda del canale, però, non è utilizzata completamente, quindi si può progettare un filtro di Nyquist più economico che occupi tutta la banda.

Nel caso NRZ:

$$B_c = \frac{r+1}{2}R \quad \text{da cui: } r = \frac{2B_c}{R} - 1 = 0.2376$$

Nel caso RZ:

$$B_c = (r+1)R \quad \text{da cui: } r = \frac{B_c}{R} - 1 = 0.2376$$

- 4) Affinchè il sistema con trasmissione RZ abbia lo stesso rapporto segnale rumore di quantizzazione è necessario che utilizzi lo stesso numero di bit.

In tal caso, però, la banda minima necessaria sarebbe 161.6 kHz. E' quindi evidente che un sistema multilivello con $L=4$ ($\ell=2$), è sufficiente ai nostri scopi.

In questo caso:

$$B_c = \frac{(r+1)}{\ell}R \quad \text{da cui: } r = \frac{\ell B_c}{R} - 1 = 0.2376$$

Quesito 3b	Trasmissione in banda passante (9 punti)
-------------------	---

Si consideri il segnale $m(t)$ onda quadra di periodo $T = 150 \mu s$. Tale segnale viene prima filtrato con un filtro passa-basso avente banda B_F e successivamente viene modulato sia in AM-DSB che in FM con una portante di ampiezza pari a 2 V. I due segnali devono essere trasmessi su un canale con banda $B_c = 250$ kHz intorno alla frequenza di 1 MHz. Nell'ipotesi che tra i due segnali modulati debba essere mantenuta una banda di guardia di 10 kHz, e che la banda a disposizione sia utilizzata per $\frac{1}{4}$ dal segnale AM ed i restanti $\frac{3}{4}$ dal segnale FM:

- 1) scrivere le espressioni delle due portanti;
- 2) calcolare il valore della frequenza di taglio B_F del filtro di pre-modulazione;
- 3) calcolare la potenza del segnale modulante;
- 4) calcolare la potenza del segnale AM e del segnale FM;
- 5) l'indice di modulazione del segnale FM.

SOLUZIONE

- 1) Togliendo i 10 kHz dalla banda totale, e considerando che la banda del segnale AM debba essere $\frac{1}{4}$ di quella a disposizione, mentre quella FM debba essere $\frac{3}{4}$ si ottiene facilmente $B_{AM} = 60$ kHz e $B_{FM} = 180$ kHz.

Nel caso AM, quindi la posizione della portante sarà:

$$f_{AM} = f_{\min} + 30 = f_c - 125 + 30 = 905 \text{ kHz}$$

Mentre nel caso FM:

$$f_{FM} = f_{\max} - 90 = f_c + 125 - 90 = 1035 \text{ kHz}$$

Quindi le espressioni delle portanti sono:

$$p_{AM}(t) = 2 \cos(181\pi \cdot 10^4 t)$$

$$p_{FM}(t) = 2 \cos(207\pi \cdot 10^4 t)$$

- 2) Il filtro di premodulazione serve sostanzialmente a stabilire la banda del segnale da modulare (visto che $m(t)$ ha banda infinita). Dato che il segnale modulato AM deve essere contenuto in una banda di 60 kHz, si ottiene subito:

$$B_F = 30 \text{ kHz}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 3) La potenza del segnale modulante si può ottenere immediatamente come somma dei c_n all'interno della banda del filtro di premodulazione. Visto che il periodo dell'onda quadra è $T = 150 \mu s$, la frequenza fondamentale è $f_0 = 6667 \text{ Hz}$. Nella banda del filtro di premodulazione ricadranno quindi un totale di 9 impulsi di Dirac, ossia;

$$P_m = \sum_{n=-4}^4 |c_n|^2 = \sum_{n=-4}^4 |f_0 \cdot H(nf_0)|^2 = \sum_{n=-4}^4 \left| f_0 \cdot \frac{T_0}{2} \text{sinc}\left(\frac{nf_0 T_0}{2}\right) e^{j2\pi n f_0 \frac{T_0}{4}} \right|^2 = \sum_{n=-4}^4 \left| \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \right|^2 = \rightarrow \boxed{P_m = 0.4752}$$
$$\frac{1}{4} (\text{sinc}^2(-1.5) + \text{sinc}^2(-0.5) + 1 + \text{sinc}^2(1.5) + \text{sinc}^2(0.5)) = \frac{1}{4} (1 + 2\text{sinc}^2(1.5) + 2\text{sinc}^2(0.5))$$

- 4) La potenza del segnale AM, tenendo conto che l'onda quadra ha media nulla, vale:

$$P_{AM} = \frac{1}{2} A_c^2 (1 + P_m) = 2.548$$

Mentre quella del segnale FM:

$$P_{FM} = \frac{A_c^2}{2} = 2$$

- 5) Dalla regola di Carson:

$$\beta = \frac{B_c}{2B_s} - 1 = \frac{180}{2 \cdot 30} - 1 = 2$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (8 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		3
5)		1
6)		1

QUESITO 2 (8 punti)		
1)		2
2)		2
3)		2
4)		2

QUESITO 3a (5 punti + 3)		
1)		2
2)		1
3)		2
4)		3

QUESITO 3b (9 punti)		
1)		1
2)		2
3)		3
4)		1
5)		2

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=4$ $\text{MIN}(Q2)=4$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=6$

COMPITO 22 - 25 marzo 2008

Quesito 1 Segnali determinati (10 punti)

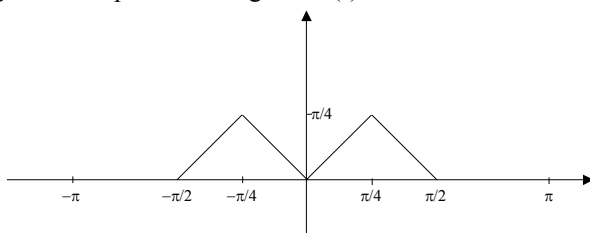
Dato un segnale $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - k2\pi)$, con $x(t)$ definito come segue: $x(t) = \begin{cases} |t| & \text{per } |t| \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - t & \text{per } \frac{\pi}{4} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + t & \text{per } -\frac{\pi}{2} \leq t < -\frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{per } -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$

calcolare:

- 1) il grafico temporale del segnale $x(t)$
- 2) l'espressione analitica e il grafico dello spettro del segnale $x(t)$
- 3) l'espressione analitica e il grafico dello spettro del segnale $y(t)$
- 4) la media temporale dei segnali $x(t)$ e $y(t)$
- 5) l'energia dei segnali $x(t)$ e $y(t)$
- 6) la potenza dei segnali $x(t)$ e $y(t)$

SOLUZIONE

- 1) il grafico temporale del segnale $x(t)$ è:



$$x(t) = \frac{\pi}{4} \left[\Lambda \left(\frac{t - \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \right) + \Lambda \left(\frac{t + \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \right) \right]$$

- 2) l'espressione analitica e il grafico dello spettro del segnale $x(t)$

Lo spettro è:

$$X(f) = \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{4} f \right) \left[e^{-j2\pi f \frac{\pi}{4}} + e^{+j2\pi f \frac{\pi}{4}} \right]$$

che si può anche scrivere come segue:

$$X(f) = \frac{\pi^2}{16} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{4} f \right) \left[\cos \left(\frac{\pi^2}{2} f \right) - j \sin \left(\frac{\pi^2}{2} f \right) + \cos \left(\frac{\pi^2}{2} f \right) + j \sin \left(\frac{\pi^2}{2} f \right) \right]$$

da cui:

$$X(f) = \frac{\pi^2}{8} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{4} f \right) \cos \left(\frac{\pi^2}{2} f \right)$$

- 3) l'espressione analitica e il grafico dello spettro del segnale $y(t)$

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nf_0) \quad \text{dove} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}$$

Calcoliamo i coefficienti della serie di Fourier:

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

$$c_n = f_0 \cdot X(n f_0) = f_0 \frac{\pi^2}{8} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{4} f_0 n\right) \cos\left(n \frac{\pi^2}{2} f_0\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2}{8} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{2\pi} n\right) \cos\left(\frac{\pi^2}{2} \frac{1}{2\pi} n\right)$$

$$\rightarrow \boxed{c_n = \frac{\pi}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)}$$

4) la media temporale dei segnali $x(t)$ e $y(t)$ è:

$$\langle x(t) \rangle = 0 \quad \langle y(t) \rangle = c_0 = \frac{\pi}{16} 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{16}$$

$$\text{oppure: } \langle y(t) \rangle = \frac{1}{T_0} 2 (\text{Area triangolo}) = \frac{1}{2\pi} 2 \frac{\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{16}$$

5) l'energia dei segnali $x(t)$ e $y(t)$

$$E_x = 4 \int_0^{\pi/4} t^2 dt = 4 \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3}{48} \rightarrow \boxed{E_x = \frac{\pi^3}{48}}$$

$$\boxed{E_y = +\infty}$$

6) la potenza dei segnali $x(t)$ e $y(t)$

$$\boxed{P_x = 0} \text{ perchè il segnale } x(t) \text{ è limitato}$$

$$P_y = \frac{E_y}{T_0} = \frac{\pi^3}{48} \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi^2}{96} \rightarrow \boxed{P_y = \frac{\pi^2}{96}}$$

Quesito 2	Variabili aleatorie (5 punti)
-----------	-------------------------------

Si consideri la funzione $f_x(x) = \begin{cases} \alpha e^{-5x} & \text{se } x \geq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ in cui α è una costante reale. Determinare:

- il valore di α affinché $f_x(x)$ rappresenti una funzione densità di probabilità
- il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria X
- l'espressione analitica e il grafico della funzione densità di probabilità $f_y(y)$ della variabile aleatoria Y uniformemente distribuita nell'intervallo $[2, 2.5]$.
- l'espressione analitica e il grafico della funzione densità di probabilità $f_z(z)$ della variabile aleatoria Z ottenuta per trasformazione della X tramite la legge di trasformazione uguale alla densità di probabilità della Y , cioè $z = g(x) = f_y(x)$

SOLUZIONE

Esercizio 2

$$a) \quad 1 = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \alpha e^{-5x} dx = \alpha \left[-\frac{e^{-5x}}{5} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} = \alpha \frac{e^{-\frac{5}{2}}}{5}$$

$$\alpha \frac{e^{-\frac{5}{2}}}{5} = 1 \Rightarrow \alpha = 5 e^{\frac{5}{2}}$$

NOTA - Affinchè $f_x(x) \geq 0 \forall x$ deve essere $\alpha \geq 0$. ok!

Dunque:

$$f_x(x) = \begin{cases} 5 e^{-5(x-\frac{1}{2})} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

$$b) m_x = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x \cdot 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx = \left[-x e^{-5(x-\frac{1}{2})} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \left[-\frac{e^{-5(x-\frac{1}{2})}}{5} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - m_x^2 = \frac{53}{100} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{53-49}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x^2 \cdot 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx = \left[-x^2 e^{-5(x-\frac{1}{2})} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} + \frac{2}{5} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x \cdot 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} m_x = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{1}{4} + \frac{7}{25} = \frac{53}{100}$$

$$3) f_Y(y) = \frac{1}{0.5} \Pi\left(\frac{y-2.25}{0.5}\right)$$

$$f_Z(z) = \text{Prob}\{Z=0\}\delta(z-0) + \text{Prob}\{Z=2\}\delta(z-2) =$$

$$4) = [\text{Prob}\{X < 2\} + \text{Prob}\{X > 2.5\}]\delta(z-0) + \text{Prob}\{2 < X < 2.5\}\delta(z-2) =$$

$$= \left[1 - \int_2^{2.5} f_X(x) dx\right]\delta(z-0) + \int_2^{2.5} f_X(x) dx \cdot \delta(z-2)$$

$$\text{Calcoliamo: } \int_2^{2.5} 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx = 5e^{5/2} \int_2^{2.5} e^{-5x} dx = \frac{5e^{5/2}}{-5} [e^{-5 \cdot 5/2} - e^{-5 \cdot 2}] = -e^{5/2} [e^{-25/2} - e^{-10}] \rightarrow$$

$$\int_2^{2.5} 5e^{-5(x-\frac{1}{2})} dx = e^{5/2} [e^{-10} - e^{-12.5}] = 5.0768 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Da cui: } f_Z(z) = 0.9995 \cdot \delta(z-0) + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \delta(z-2)$$

Quesito 3a | Trasmissione in banda base (8 punti + 1)

Si vuole trasmettere il segnale $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t-nT_s}{T_s/5}\right)$ con $T_s = 200 \mu s$, su un canale avente una banda di 250 kHz, dopo

averlo convertito in PCM. Sapendo che il canale introduce un rumore additivo gaussiano con densità spettrale di potenza costante $N_0/2 = 0.3 \mu W/Hz$, che si trasmette utilizzando un codice di linea polare NRZ con impulsi rettangolari, e che in ricezione viene utilizzato un filtro adattato, nell'ipotesi di volere una probabilità di errore sul bit inferiore a $P_e = 10^{-4}$, calcolare:

- 6) La banda al 90% del segnale $x(t)$
- 7) L'energia per bit necessaria
- 8) Il valore della bit-rate che massimizza l'utilizzo della banda del canale [sugg.: nel calcolo non entra la particolare forma del segnale $x(t)$];
- 9) il minimo livello di tensione dell'impulso in ricezione (A) affinché sia garantita la specifica sulla probabilità di errore;
- 10) il numero massimo di bit utilizzabile se per $x(t)$ si considera la banda al 90%;
- 11) **[FACOLTATIVO]** il rapporto segnale rumore medio in ricezione (all'uscita del decodificatore PCM, sul segnale analogico ricostruito)

SOLUZIONE

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 1) La banda al 90% del segnale $x(t)$

$$L'energia della replica principale è $E_1 = 2 \int_0^{T_s/5} \frac{1}{\left(\frac{T_s}{5}\right)^2} t^2 dt = 2 \frac{25}{T_s^2} \frac{1}{3} \left[\frac{T_s}{5}\right]^3 = 2 \frac{T_s}{15} = 2.667 \cdot 10^{-5}$$$

$$La potenza del segnale è: $P_s = \frac{E_1}{T_s} = \frac{2}{15} \rightarrow \boxed{P_{OUT} = 90\% P_s = 0.12}$$$

I c_n del segnale periodico sono: $c_n = \frac{1}{5} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{5}\right)$. In particolare abbiamo:

$$c_0 = 1/5 * \text{sinc}(0 * 1/5) \rightarrow c_0 = 0.2000$$

$$c_1 = 1/5 * \text{sinc}(1 * 1/5) \rightarrow c_1 = 0.1871$$

$$c_2 = 1/5 * \text{sinc}(2 * 1/5) \rightarrow c_2 = 0.1514$$

$$c_3 = 1/5 * \text{sinc}(3 * 1/5) \rightarrow c_3 = 0.1009$$

per cui, sommando i c_n^2 fino a quando non si supera la potenza P_{OUT} si ha: $n = 2$. Infatti

$$\text{somma}_0 = c_0^2 = 0.0400$$

$$\text{somma}_1 = c_0^2 + 2 * c_1^2 = 0.1100$$

$$\text{somma}_2 = c_0^2 + 2 * c_1^2 + 2 * c_2^2 = 0.1558$$

$$\text{Dunque la banda al 90\% sarà: } \boxed{B_{90\%} = 2 f_0 = 2/T_s = 10 \text{ kHz}}$$

- 2) L'energia per bit necessaria

$$P_e = Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}} \right) \rightarrow P_e = Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}} \right) = 1 \cdot 10^{-4} \rightarrow \sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}} = 3.7 \rightarrow \boxed{E_b = 3.7^2 \frac{N_0}{2} = 4.11 \mu W}$$

- 3) Il valore della bit-rate che massimizza l'utilizzo della banda del canale [sugg.: nel calcolo non entra la particolare forma del segnale $x(t)$];

$$B_{\text{null}} = R \rightarrow \boxed{R = 250 \text{ kbit/s}}$$

- 4) il minimo livello di tensione dell'impulso in ricezione (A) affinché sia garantita la specifica sulla probabilità di errore;

$$\text{sappiamo che l'energia media di bit per l'NRZ unipolare è: } E_b = A^2 T \rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{E_b}{T}} = \sqrt{E_b R} = 1.0133}$$

- 5) il numero massimo di bit utilizzabile se per $x(t)$ si considera la banda al 90%;

Sapendo che il segnale analogico da trasformare in PCM occupa una banda $B_{90\%} = 10 \text{ kHz}$, dalla formula

$$B_{NRZ} = n f_s \text{ otteniamo: } n_{bit} = \left\lfloor \frac{250k}{2 \cdot 10k} \right\rfloor = 12$$

- 6) **[FACOLTATIVO]** il rapporto segnale rumore medio in ricezione (all'uscita del decodificatore PCM, sul segnale analogico ricostruito)

$$M = 2^{n_{bit}} = 4096 \rightarrow \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} = 2500$$

Quesito 3b Trasmissione in banda passante (7 punti)

Il segnale $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t - nT_s}{T_s/5}\right)$ con $T_s = 200 \mu s$ deve essere trasmesso su un canale con banda passante pari a 200 kHz

che introduce un rumore additivo gaussiano con densità spettrale di potenza costante e pari a $N_0/2 = 0.1 \mu W/Hz$ (assumere attenuazione unitaria). Nell'ipotesi in cui si utilizzi modulazione FM è necessario inserire in trasmissione, prima del modulatore, un filtro di premodulazione, al fine di ridurre opportunamente la banda del segnale modulante. Sapendo che è richiesto un rapporto segnale rumore all'ingresso del ricevitore pari a 15 dB, calcolare

- 5) il valore dell'ampiezza della portante;
- 6) la massima frequenza di taglio del filtro di premodulazione se si utilizza un valore di $\beta = 3$;
- 7) la potenza del segnale modulante (dopo il filtro di premodulazione);
- 8) il rapporto segnale rumore in uscita dal demodulatore

SOLUZIONE

- 1) il valore dell'ampiezza della portante;

$$15dB = 10^{15/10} = 31.62$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Tenendo conto che $B_{can} = 2(\beta_F + 1)B = 200 \text{ kHz}$, abbiamo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = P_{s,RX} \frac{1}{2N_0(\beta_F + 1)B} = P_{s,RX} \frac{1}{2 \cdot \frac{N_0}{2} \cdot 2(\beta_F + 1)B} = 31.62 \quad \rightarrow \quad P_{s,RX} \frac{1}{2 \cdot 0.1 \mu W \cdot 200 \text{ kHz}} = 31.62 \quad \rightarrow$$

$$P_{s,RX} = 31.62 \cdot 0.2 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^3 = 0.1265 \quad \rightarrow \quad P_{s,RX} = 0.1265 = \frac{A_c^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_c = \sqrt{2 \cdot 0.1265} = 1.59$$

- 2) la massima frequenza di taglio del filtro di premodulazione se si utilizza un valore di $\beta = 3$;

$$\text{Sappiamo che } B_s = 2(\beta + 1)B \quad \rightarrow \quad B = \frac{B_s}{2(\beta + 1)} = 25 \text{ kHz}$$

- 3) la potenza del segnale modulante (dopo il filtro di premodulazione);

In $B = 25 \text{ kHz}$, tenendo conto che la frequenza fondamentale del segnale originale è $f_0 = 1/T_s = 5 \text{ kHz}$, ci stanno 5 armoniche.

$$\text{Quindi la potenza del segnale modulante, tenendo conto che } c_n = \frac{1}{5} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{5}\right), \text{ è: } \boxed{P = c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^5 c_n^2 = 0.13294}$$

- 4) il rapporto segnale rumore in uscita dal demodulatore è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 3 \cdot P_{s,RX} \frac{\beta_F^2}{N_0 B} \frac{P_m}{V_p^2} = 3 \cdot \frac{0.1265 \cdot 3^2}{2 \cdot 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^3} \frac{0.13294}{1^2} = 907.9715$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (10 punti)		
1)		1
2)		1
3)		2
4)		2
5)		2
6)		2

QUESITO 2 (5 punti)		
1)		1
2)		1
3)		0.5
4)		2.5

QUESITO 3a (8 punti + 1)		
1)		2
2)		2
3)		1
4)		1
5)		2
6)		1

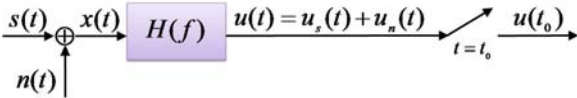
QUESITO 3b (7 punti)		
1)		2
2)		2
3)		2
4)		1

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=4$ $\text{MIN}(Q2)=2$ $\text{MIN}(Q3a+Q3b)=8$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 23 - 20 giugno 2008

Quesito 1	Teoria dei segnali (12 punti)	
------------------	--------------------------------------	--

Nel sistema in figura il filtro con funzione di trasferimento $H(f)$ ha in ingresso il segnale $x(t) = s(t) + n(t)$, dove:

- $s(t) = 4A \cos(2\pi 2f_s t) + 2B \cos(2\pi f_s t)$ [nota: segnale determinato]
- $n(t)$ è un rumore additivo gaussiano bianco a media nulla e densità spettrale di potenza $S_n(f) = 0.1 \text{ mW/Hz}$
- $H(f)$ è la funzione di trasferimento di un filtro ideale passa-basso, con banda $B_H = 2.5 \cdot f_s$, e attenuazione di potenza in banda passante pari a $\gamma = 3 \text{ dB}$.

L'uscita del filtro è il segnale $u(t) = u_s(t) + u_n(t)$, somma di $u_s(t)$, componente di segnale utile (filtraggio di $s(t)$), e di della componente di rumore $u_n(t)$ (filtraggio di $n(t)$). Si chiede di:

- 1) L'espressione analitica dello spettro di $s(t)$ e il grafico dello spettro delle ampiezze
- 2) L'espressione analitica e il grafico della funzione di trasferimento $H(f)$
- 3) L'espressione analitica del segnale $u_s(t)$, e la rappresentazione grafica del suo spettro delle ampiezze
- 4) Dire se il segnale $s(t)$ ha subito una distorsione di ampiezza o di fase
- 5) La potenza dei segnali $s(t)$ e $u_s(t)$
- 6) La potenza del segnale $n(t)$ e $u_n(t)$

Il segnale $u(t)$ viene campionato all'istante $t_0 = 1/f_s$ s. Determinare:

- 7) La densità di probabilità del campione $u(t_0)$ [suggerimento: una variabile aleatoria gaussiana a media nulla moltiplicata per una costante è ancora gaussiana a media nulla, ma con varianza moltiplicata per il quadrato della costante]
- 8) La probabilità che $u(t_0)$ sia positivo

SOLUZIONE

- 1) L'espressione analitica dello spettro di $s(t)$ e il grafico dello spettro delle ampiezze

$$S(f) = 2A[\delta(f - 2f_s) + \delta(f + 2f_s)] + B[\delta(f - f_s) + \delta(f + f_s)]$$

- 2) Dato che la funzione di trasferimento $H(f)$ è in tensione, la sua espressione analitica è:

$$H(f) = K \Pi\left(\frac{f}{2B_H}\right) = \sqrt{0.5} \Pi\left(\frac{f}{5f_s}\right) \quad \text{dove} \quad K = \sqrt{G_p} \quad (\text{guadagno in tensione}) \quad \text{dove:}$$

$$G_p = -3 \text{ dB} = \frac{1}{10^{3/10}} = 0.5 \quad (\text{guadagno in potenza})$$

- 3) L'espressione analitica del segnale $u_s(t)$, e la rappresentazione grafica del suo spettro delle ampiezze

$$U_s(f) = 2KA[\delta(f - 2f_s) + \delta(f + 2f_s)] + KB[\delta(f - f_s) + \delta(f + f_s)]$$

- 4) Dire se il segnale $s(t)$ ha subito una distorsione di ampiezza o di fase

Il segnale $s(t)$ non ha subito alcuna distorsione poiché tutte le frequenze sono state attenuate dello stesso valore

- 5) La potenza dei segnali $s(t)$ e $u_s(t)$

$$P_s = 2(2A)^2 + 2(B)^2 = 8A^2 + 2B^2$$

$$P_{u_s} = 2(2KA)^2 + 2(KB)^2 = 8A^2 K^2 + 2B^2 K^2$$

- 6) La potenza del segnale $n(t)$ e $u_n(t)$

$$P_n = +\infty$$

$$P_{u_n} = 0.1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot B_H \cdot K^2 = 25.06 \text{ mW}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 7) La densità di probabilità del campione $u(t_0)$ è una gaussiana con

- media pari a

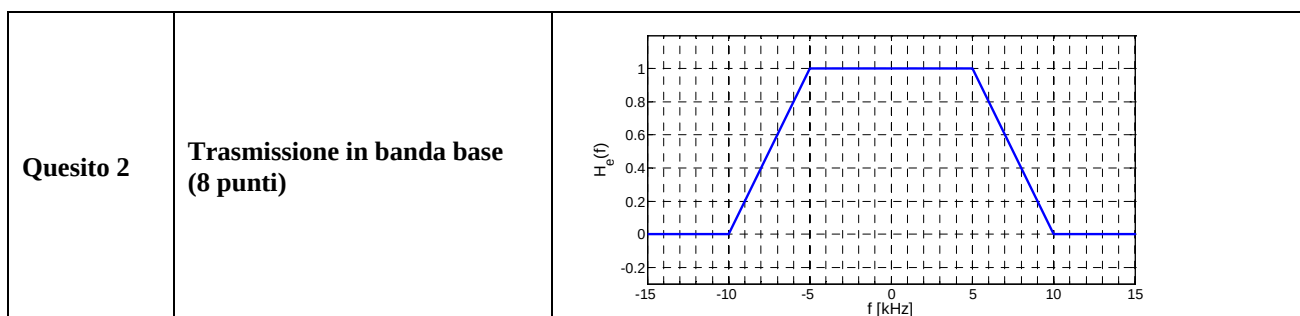
$$\mu = u_s(t_0) = 4KA \cos(2\pi \cdot 2) + 2BK \cos(2\pi) = 0$$

- varianza pari a quella del rumore filtrato. Dato che il rumore filtrato è a media nulla, la varianza coincide con la potenza, e dunque abbiamo che:

$$\sigma^2 = P_{u_n} = 25.06 \text{ mW}$$

Quindi la pdf di $u(t_0)$ è: $f_{u(t_0)}(z) = N(\mu, \sigma^2) \rightarrow f_{u(t_0)}(z) = N(0, 25.06 \cdot 10^{-3})$

- 8) La probabilità che $u(t_0)$ sia positivo è: $P\{u(t_0) > 0\} = \frac{1}{2}$



La funzione $H_e(f)$ rappresentata in figura è la risposta in frequenza di un intero sistema di trasmissione digitale costituito dalla cascata del filtro formattatore di trasmissione, del canale e del filtro di ricezione.

- 1) Scrivere l'espressione analitica della funzione $H_e(f)$
- 2) Se tale sistema viene utilizzato per una trasmissione digitale, la trasmissione può avvenire con interferenza intersimbolica nulla? Perché?
- 3) Se la risposta è sì, con quale velocità di trasmissione dei simboli?
- 4) Determinare la banda in eccesso rispetto alla banda minima che sarebbe stata sufficiente ad eliminare l'ISI.

SOLUZIONE

- 1) Scrivere l'espressione analitica della funzione $H_e(f)$

$$H_e(f) = \Pi\left(\frac{f}{10}\right) + \Pi\left(\frac{f-7.5}{5}\right) \cdot \Lambda\left(\frac{f-5}{5}\right) + \Pi\left(\frac{f+7.5}{5}\right) \cdot \Lambda\left(\frac{f+5}{5}\right)$$

- 2) Se tale sistema viene utilizzato per una trasmissione digitale, la trasmissione può avvenire con interferenza intersimbolica nulla? Perché?

Il filtro $H_e(f)$ è un filtro di Nyquist, e dunque può eliminare l'ISI.

- 3) Se la risposta è sì, con quale velocità di trasmissione dei simboli?

L'ISI verrà eliminato se si usa una trasmissione digitale con frequenza di simbolo $D = 2 f_0 = 15 \text{ kBaud}$

- 4) Determinare la banda in eccesso rispetto alla banda minima che sarebbe stata sufficiente ad eliminare l'ISI.

La banda minima è $f_0 = 7.5 \text{ kHz}$. Dato che sta usando una banda di 10 kHz , abbiamo una banda in eccesso pari a

$$B_{\text{eccesso}} = 2.5 \text{ kHz}$$

Quesito 3 Trasmissione in banda base e banda passante (10 punti)

Un segnale $s(t)$ con banda $B = 4 \text{ kHz}$ viene trasformato in formato binario usando un codificatore PCM, con campionamento effettuato in modo da avere una banda di guardia di 1 kHz .

- 1) Progettare il codificatore PCM (frequenza di campionamento, numero di livelli e lunghezza della parola di codice) affinché sia garantito a destinazione un rapporto segnale/rumore medio di 72 dB , non conoscendo l'esatta probabilità di perdita del canale digitale, ma supponendo che il canale lavori sopra soglia (perdita di 3 dB sul rapporto segnale/rumore) [sugg.: imporre una codifica PCM che dia in sorgente 75 dB].
- 2) Calcolare il rapporto segnale/rumore medio effettivo ottenuto in sorgente dal codificatore PCM progettato al punto 1.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 3) Calcolare la probabilità di perdita massima del canale digitale affinché effettivamente si abbia a destinazione un rapporto segnale/rumore medio di 72 dB.

Supponendo che la sequenza binaria venga trasmessa con una modulazione BPSK con formattazione a impulso rettangolare, filtro di ricezione adattato all'impulso formattatore, e ampiezza della portante $A_c = 6V$ su un canale in banda passante con banda $W = 80$ kHz e attenuazione in potenza di 10 dB, e con densità spettrale di potenza del rumore, supposto Gaussiano bianco, pari a $0.5 \mu W/Hz$, costante su tutte le frequenze:

- 4) Calcolare l'energia media per bit, E_b , trasmessa
- 5) Calcolare l'energia media e la potenza media ricevute
- 6) Calcolare la probabilità di errore del canale digitale
- 7) Dire se il canale digitale che si sta utilizzando soddisfa il requisito di 72 dB a destinazione sul segnale analogico, discusso al punto 3.

SOLUZIONE

- 1) Progettare il codificatore PCM (frequenza di campionamento, numero di livelli e lunghezza della parola di codice) affinché sia garantito a destinazione un rapporto segnale/rumore medio di 72 dB, non conoscendo l'esatta probabilità di perdita del canale digitale, ma supponendo che il canale lavori sopra soglia (perdita di 3 dB sul rapporto segnale/rumore).

Per avere un SNR medio a destinazione pari a 72 dB, supponendo che il canale lavori sopra soglia, dobbiamo progettare il sistema PCM per aver un SNR medio di codifica pari a 75 dB. Applicando la regola dei 6dB, dobbiamo usare un numero di bit per parola di codice pari a:

$$n = \left\lceil \frac{75}{6} \right\rceil = \lceil 12.5 \rceil = 13 \quad \rightarrow \quad M = 2^n = 2^{13} = 8192 \text{ livelli}$$

La frequenza di campionamento è $f_s = 2B + B_G = 9 \text{ kHz}$

- 2) Calcolare il rapporto segnale/rumore medio effettivo ottenuto in sorgente dal codificatore PCM progettato al punto 1.

$$SNR_{OUT,dB} = 6.02 \cdot 13 = 78.26 \text{ dB}$$

- 3) Calcolare la probabilità di perdita massima del canale digitale affinché effettivamente si abbia a destinazione un rapporto segnale/rumore medio di 72 dB.

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{out,dB} = 72 \text{ dB} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = 10^{7.2} = 15.85 \cdot 10^6$$

Usiamo l'equazione: $\left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \rightarrow P_e = \frac{\left(\frac{S}{N} \right)_{out} - 1}{4(M^2 - 1)} = 1.2049e-008$

- 4) Calcolare l'energia media per bit, E_b , trasmessa

$$E_b = \frac{A_c^2}{2} T_b = \frac{A_c^2}{2} \frac{1}{n f_s} = 1.5385e-004$$

- 5) Calcolare l'energia media e la potenza media per bit ricevute

L'attenuazione di canale è $\gamma_{dB} = 10 \text{ dB} \rightarrow \gamma_{lin} = 10^{\gamma_{dB}/10} = 10^1 = 10$

$$E_{b,rx} = \frac{E_b}{\gamma_{lin}} = \frac{1.5385e-004}{10} = 15.385 \mu J \quad P_{s,rx} = E_{b,rx} R = 1.8 \text{ W}$$

- 6) Calcolare la probabilità di errore del canale digitale

$$P_e = Q \left[\sqrt{2 \frac{E_{b,rx}}{N_0}} \right] = Q[5.5470] = \text{calcolata per } M = 4, \frac{N_0}{2} = 0.5 \text{ mW/Hz. Abbiamo}$$

$$P_e \approx Q[7.6699e-005] = 1.4530e-008$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 7) Dire se il canale digitale che si sta utilizzando soddisfa il requisito di 72 dB a destinazione sul segnale analogico, discusso al punto 3.

No, non soddisfa, dato che il canale digitale presenta una probabilità di perdita superiore a quella calcolata al punto 3.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (12 punti)		
1)		1
2)		1
3)		2
4)		1
5)		1
6)		2
7)		2
8)		2

QUESITO 2 (5 punti)		
1)		2
2)		2
3)		2
4)		2

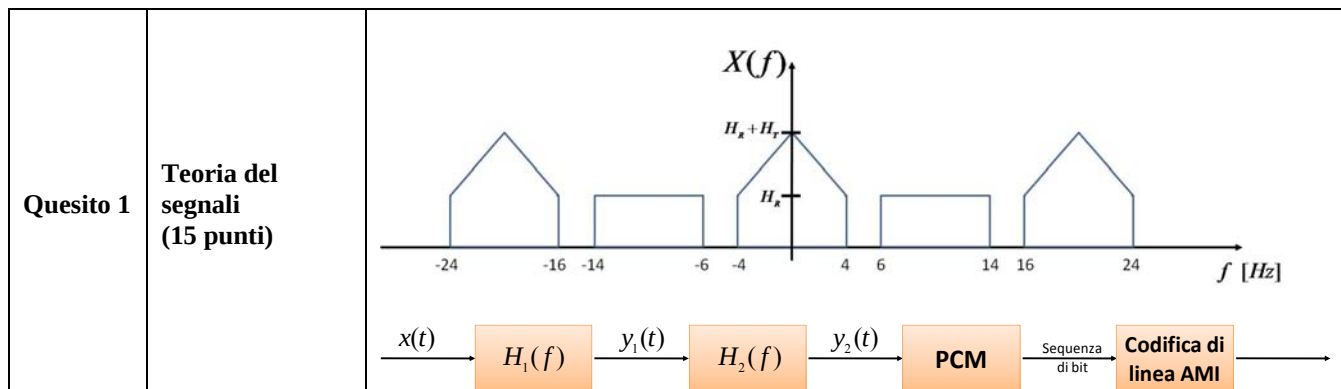
QUESITO 3 (10 punti)		
1)		2
2)		1
3)		2
4)		1
5)		1
6)		2
7)		1

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=5$ $\text{MIN}(Q2)=3$ $\text{MIN}(Q3)=4$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 24 - 04 luglio 2008



Dato il segnale il cui spettro è rappresentato in figura (**Nota:** lo spettro NON È PERIODICO, e le ascisse sono espresse in kHz). Calcolare:

- 9) l'espressione analitica nel dominio della frequenza
- 10) l'espressione analitica nel dominio del tempo
- 11) l'energia e la potenza
- 12) la media temporale

Si supponga di filtrare il segnale precedente con un filtro ideale passa-basso $H_1(f)$ con frequenza di taglio pari a $B_{H1} = 5.2$ kHz e guadagno di tensione pari a 4. Sia $y_1(t)$ il segnale risultante. Calcolare:

- 13) lo spettro $Y_1(f)$ del segnale ottenuto all'uscita del filtro
- 14) la media temporale, l'energia e la potenza di tale segnale filtrato

Si supponga infine di filtrare ulteriormente tale segnale con un filtro a coseno rialzato con frequenza a -6 dB pari a 6.2 kHz. Sia $y_2(t)$ il segnale risultante. Calcolare:

- 15) il massimo coefficiente di roll-off tale che il segnale $y_1(t)$ non venga distorto dal suddetto filtro a coseno rialzato
- 16) la minima frequenza di campionamento e il numero di livelli di quantizzazione da utilizzare se si vuole trasformare il segnale in digitale con un sistema PCM a banda di guardia pari a 2 kHz e un rapporto segnale rumore medio pari a 60
- 17) i primi 2 campioni ottenuti all'uscita del sistema PCM del punto precedente, ipotizzando una codifica Gray di cui bisogna indicare la tabella, e ipotizzando il segnale uniformemente distribuito tra il suo valore massimo positivo e il suo opposto
- 18) il grafico temporale del segnale ottenuto per rappresentare i due campioni precedenti se si utilizza un codice di linea AMI a formattazione a impulso rettangolare
- 19) la banda al primo nullo del segnale ottenuto al punto precedente

SOLUZIONE

Esprimiamo tutte le frequenze in kHz e i tempi in ms.

- 1) l'espressione analitica nel dominio della frequenza:

$$X(f) = H_R \sum_{n=-2}^{+2} \Pi\left(\frac{f-10n}{8}\right) + H_T \sum_{n=-1}^{+1} \Lambda\left(\frac{f-20n}{4}\right)$$

- 2) l'espressione analitica nel dominio del tempo

$$x(t) = H_R \sum_{n=-2}^{+2} 8 \operatorname{sinc}(8t) e^{-j2\pi 10nt} + H_T \sum_{n=-1}^{+1} 4 \operatorname{sinc}^2(4t) e^{-j2\pi 20nt}$$

- 3) l'energia e la potenza

La potenza è nulla poiché il segnale è limitato nel tempo $\Rightarrow \boxed{P_x = 0}$

L'energia può essere calcolata nel dominio della frequenza applicando il teorema di Raleigh:

$$E_x = 2E_{\text{rett}} + 3E_{\text{triang}} \quad \text{dove:}$$

$$E_{\text{rett}} = 8 \cdot H_R^2$$

Per quanto riguarda i triangoli, si deve considerare che essi sono sollevati di H_R . Quindi abbiamo:

$$E_{\text{triang}} = 2 \cdot \int_0^4 (mf + n)^2 df = 2 \cdot \int_0^4 (m^2 f^2 + 2mnf + n^2) df = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} m^2 f^3 + \frac{1}{2} 2mnf^2 + n^2 f \right]_0^4$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

dove: $m = -\frac{H_r}{4}$ e $n = H_r + H_r$

e dunque l'energia totale è: $E_x = 2 E_{rett} + 3 E_{triang}$

4) la media temporale è nulla poiché il segnale è limitato nel tempo $\rightarrow \langle x(t) \rangle = 0$

5) lo spettro $Y_1(f)$ del segnale ottenuto all'uscita del filtro

$$Y(f) = 4 H_r \Pi\left(\frac{f}{8}\right) + 4 H_r \Lambda\left(\frac{f}{4}\right)$$

6) la media temporale, l'energia e la potenza di tale segnale filtrato

La media temporale è nulla poiché il segnale è limitato nel tempo $\rightarrow \langle y_1(t) \rangle = 0$

La potenza è nulla poiché il segnale è limitato nel tempo $\rightarrow P_{y_1} = 0$

L'energia è: $E_{y_1} = 16 E_{triang}$

Si supponga infine di filtrare ulteriormente tale segnale con un filtro a coseno rialzato con frequenza a -6 dB pari a 16 kHz. Sia $y_2(t)$ il segnale risultante. Calcolare:

7) il minimo coefficiente di roll-off tale che il segnale $y_1(t)$ non venga distorto dal suddetto filtro a coseno rialzato.

Poniamo $f_1 = 4$ kHz, cioè al valore della banda del segnale $y_1(t)$, cioè alla massima frequenza che non deve

essere distorta. Abbiamo allora: $r = \frac{f_\Delta}{f_0} = \frac{f_0 - f_1}{f_0} = 0.35$

8) la minima frequenza di campionamento e il numero di livelli di quantizzazione da utilizzare se si vuole trasformare il segnale in digitale con un sistema PCM a banda di guardia pari a 2 kHz e un rapporto segnale rumore medio pari a 60

La minima frequenza di campionamento è: $f_c = 2B + B_g = 10$ k campioni/s

Il numero di livelli è: $M_{tmp} = \sqrt{SNR} = 7.75$,

Tenendo conto che il numero di livelli deve essere una potenza del 2, calcoliamo prima il numero di bi per parola di codice: $n = \lceil \log_2 M_{tmp} \rceil = 3 \rightarrow M = 2^n = 8$

9) i primi 6 bit ottenuti all'uscita del sistema PCM del punto precedente, ipotizzando una codifica Gray di cui bisogna indicare la tabella, e ipotizzando il segnale uniformemente distribuito tra il suo valore massimo positivo e il suo opposto

Il segnale in ingresso al sistema PCM è: $y_2(t) = y_1(t) = 32 \cdot H_r \text{sinc}(8t) + 16 \cdot H_r \text{sinc}^2(4t)$

Dato che la lunghezza della parola di codice è $n = 3$, i primi 6 bit corrispondono ai primi due campioni, i quali vengono ottenuti agli istanti di campionamento $t_0 = 0$ e $t_1 = T_c = \frac{1}{f_c} = 100\mu\text{s}$. Abbiamo dunque:

$$y_2(t_0) = 32 H_r + 16 H_r \quad \text{e} \quad y_2(t_1) = 32 \cdot H_r \text{sinc}(8t_1) + 16 \cdot H_r \text{sinc}^2(4t_1)$$

Prendiamo per esempio $H_r = 4$ e $H_r = 5$.

Dividendo in 8 livelli il range $[-y_2(t_0), y_2(t_0)] = [-208, 208]$, e utilizzando la seguente tabella di Grey:

100
101
111
110
010
011
001
000

abbiamo: SOGLIE: $[-208 \quad -156 \quad -104 \quad -52 \quad 0 \quad 52 \quad 104 \quad 156 \quad 208]$
 208 $\rightarrow$ "100" (ottavo intervallo dal basso)

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

66.59 → "111" (sesto intervallo dal basso)

Quindi la sequenza è: 100111

- 10) il grafico temporale del segnale ottenuto per rappresentare i due campioni precedenti se si utilizza un codice di linea AMI a formattazione a impulso rettangolare [VEDI GRAFICO]

- 11) la banda al primo nullo del segnale ottenuto al punto precedente

$$b_{1^o \text{ nullo}} = 2R = 2n f_c = 60 \text{ kHz}$$

Quesito 2	Varabili aleatorie e processi aleatori (8 punti)	
------------------	---	--

Siano date 3 monete indistinguibili esteriormente, di cui una non truccata, con probabilità di uscita della Testa (T) pari a $p_1 = \frac{1}{2}$, e due truccate, con rispettivamente probabilità $p_2 = \frac{1}{3}$ e $p_3 = \frac{1}{4}$ di uscita della Testa (T). Si prende una moneta a caso e la si lancia più volte. Determinare:

- la probabilità che esca Testa su 1 lancio
- la probabilità che non esca mai Testa su 2 lanci
- la probabilità che esca esattamente una Testa su 2 lanci
- la probabilità che la moneta estratta sia quella non truccata se non esce mai Testa su 3 lanci
- la probabilità che esca Testa al secondo lancio, sapendo che è uscita Testa al primo lancio (SUGG.: trasformare la probabilità condizionata in probabilità congiunta)

SOLUZIONE

Siano T_1 , T_2 e T_3 le variabili aleatorie che assumono i valori 1 e 0 a seconda che, lanciando la moneta 1, 2 o 3, esca una testa o una croce.

Sia S la variabile aleatoria che assume i valori 1, 2 o 3 a seconda della moneta lanciata.

- 1) la probabilità che esca Testa su 1 lancio è:

$$P\{T \text{ su 1 lancio}\} = \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_3 = 0.3611$$

- 2) la probabilità che non esca mai Testa su 2 lanci

$$P\{\text{mai } T \text{ su 2 lanci}\} = \sum_{i=1}^3 \text{Prob}\{T_i = 0, T_i = 0 | S = i\} \cdot \text{Prob}\{S = i\} = \frac{1}{3}(1-p_1)^2 + \frac{1}{3}(1-p_2)^2 + \frac{1}{3}(1-p_3)^2 = 0.4190$$

- 3) la probabilità che esca esattamente una Testa su 2 lanci

$$\begin{aligned} P\{1 T \text{ su 2 lanci}\} &= \sum_{i=1}^3 [\text{Prob}\{T_i = 1, T_i = 0 | S = i\} + \text{Prob}\{T_i = 0, T_i = 1 | S = i\}] \cdot \text{Prob}\{S = i\} = \\ &= \frac{1}{3} [(1-p_1)p_1 + p_1(1-p_1)] + \frac{1}{3} [(1-p_2)p_2 + p_2(1-p_2)] + \frac{1}{3} [(1-p_3)p_3 + p_3(1-p_3)] = \\ &= \frac{1}{3} 2(1-p_1)p_1 + \frac{1}{3} 2(1-p_2)p_2 + \frac{1}{3} 2(1-p_3)p_3 \end{aligned}$$

E dunque:

$$P\{1 T \text{ su 2 lanci}\} = \frac{2}{3} [(1-p_1)p_1 + (1-p_2)p_2 + (1-p_3)p_3] = 0.4390$$

- 4) la probabilità che la moneta estratta sia quella non truccata se non esce mai Testa su 3 lanci

Applicando il teorema di Bayes, abbiamo:

$$P\{S = 1 | 0 T \text{ su 3 lanci}\} = \frac{\text{Prob}\{0 T \text{ su 3 lanci} | S = 1\} \cdot \text{Prob}\{S = 1\}}{\sum_{i=1}^3 \text{Prob}\{0 T \text{ su 3 lanci} | S = i\} \cdot \text{Prob}\{S = i\}}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

e quindi:

$$P\{S=1|0T \text{ su 3 lanci}\} = \frac{(1-p_1)^3 \frac{1}{3}}{(1-p_1)^3 \frac{1}{3} + (1-p_2)^3 \frac{1}{3} + (1-p_3)^3 \frac{1}{3}} = 0.1482$$

- 5) la probabilità che esca Testa al secondo lancio, sapendo che è uscita Testa al primo lancio (SUGG.: trasformare la probabilità condizionata in probabilità congiunta)

$$P\{T \text{ al secondo lancio} | T \text{ al primo lancio}\} = \frac{P\{T \text{ al primo e al secondo lancio}\}}{P\{T \text{ al primo lancio}\}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^3 \text{Prob}\{2T \text{ su 2 lanci} | S=i\} \cdot \text{Prob}\{S=i\}}{\sum_{i=1}^3 \text{Prob}\{1T \text{ su 1 lancio} | S=i\} \cdot \text{Prob}\{S=i\}} = \frac{\frac{1}{3} p_1 p_1 + \frac{1}{3} p_2 p_2 + \frac{1}{3} p_3 p_3}{\frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_3}$$

da cui:

$$P\{T \text{ al secondo lancio} | T \text{ al primo lancio}\} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{p_1 + p_2 + p_3} = 0.3910$$

Quesito 3 Trasmissione in banda base e banda passante (10 punti)

Un segnale modulato FM occupa una banda pari a 450 kHz intorno alla frequenza portante $f_c = 10$ MHz con un indice di modulazione $\beta = 6$, e usa una potenza pari a 10 mW. Lo stesso segnale viene modulato in ampiezza con la stessa portante usando una potenza di 15 mW. Sapendo che il segnale modulante è un coseno e che la trasmissione avviene su un canale che introduce un rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza costante e pari a $1.2 \cdot 10^{-9}$ W/Hz, calcolare:

- 1) l'ampiezza della portante
- 2) la potenza del segnale modulante
- 3) l'espressione analitica del segnale modulante
- 4) la banda occupata dal segnale modulato AM
- 5) il rapporto segnale/rumore in dB all'uscita del demodulatore FM
- 6) il rapporto segnale/rumore in dB all'uscita del demodulatore AM, con demodulazione coerente

SOLUZIONE

- 1) l'ampiezza della portante

Dato che la potenza del segnale FM è 6 mW, abbiamo: $P_{FM} = \frac{1}{2} A_c^2$

$$A_c = \sqrt{2 P_{FM}} = 0.14$$

- 2) la potenza del segnale modulante

Dalla potenza del segnale AM, e sapendo che il segnale modulante è un coseno, e pertanto a media nulla,

$$\text{abbiamo: } P_{AM} = \frac{1}{2} A_c^2 [1 + P_m] \rightarrow P_m = \frac{2 P_{AM}}{A_c^2} - 1 = 0.5$$

- 3) l'espressione analitica del segnale modulante

$$\text{Dato che il segnale è un coseno e quindi la sua potenza è } P_m = \frac{A_m^2}{2} \rightarrow A_m = \sqrt{2 P_m} = 1$$

Per calcolare la banda della modulante, usiamo la regola di Carson: $B_{FM} = 2(\beta + 1)B_m \rightarrow$

$$B_m = \frac{B_{FM}}{2(\beta + 1)} = 32.1 \text{ kHz}$$

E dunque abbiamo: $m(t) = 1 \cos(2\pi 32.1 \cdot 10^3 t)$

- 4) la banda occupata dal segnale modulato AM

$$B_{AM} = 2 B_m = 64.3 \text{ kHz}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 5) il rapporto segnale/rumore in dB all'uscita del demodulatore FM

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 3 \cdot P_{s,RX} \frac{\beta_F^2}{N_0 B} \frac{P_m}{V_p^2} = 7000 = 38.45 \text{ dB}$$

- 6) il rapporto segnale/rumore in dB all'uscita del demodulatore AM, con demodulazione coerente

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{A_c^2 P_m}{2 N_0 B} G_c = 51.8519 = 17.1476 \text{ dB}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (15 punti)		
1)		2
2)		2
3)		2
4)		1
5)		1
6)		2
7)		1
8)		1
9)		1
10)		1
11)		1

QUESITO 2 (7 punti)		
1)		1
2)		1
3)		2
4)		2
5)		1

QUESITO 3 (8 punti)		
1)		1
2)		2
3)		2
4)		1
5)		1
6)		1

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=5$ $\text{MIN}(Q2)=3$ $\text{MIN}(Q3)=4$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 25 - 05 settembre 2008

Quesito 1	Teoria dei segnali (8 punti)	
------------------	---	--

All'ingresso di un sistema lineare si abbia il segnale $v(t) = \cos(2\pi t)$. Se la risposta all'impulso del sistema è $h(t) = e^{-4t} u(t)$. Calcolare:

- | | |
|---|--|
| 20) lo spettro bilatero del segnale di uscita | 23) l'energia e la potenza del segnale di uscita |
| 21) lo spettro delle ampiezze del segnale di uscita | 24) la media del segnale di uscita |
| 22) lo spettro delle fasi del segnale di uscita | |

SOLUZIONE

La trasformata di Fourier del segnale di ingresso è:

$$V(f) = \frac{1}{2} \delta(f-1) + \frac{1}{2} \delta(f+1)$$

La trasformata di Fourier della risposta all'impulso del sistema lineare è:

$$H(f) = \frac{1}{4 + j2\pi f}$$

- 1) Lo spettro bilatero del segnale di uscita sarà allora:

$$U(f) = H(f) \cdot V(f) = \frac{1}{8 + j4\pi} \delta(f-1) + \frac{1}{8 - j4\pi} \delta(f+1) \rightarrow U(f) = \frac{1}{8 + j4\pi} \delta(f-1) + \frac{1}{8 - j4\pi} \delta(f+1)$$

$$2) |U(f)| = \frac{1}{\sqrt{64 + 16\pi^2}} [\delta(f-1) + \delta(f+1)]$$

$$3) \text{ Fase}\{U(f)\} = \begin{cases} -\arctg\left(\frac{4\pi}{8}\right) & \text{per } f = 1 \\ -\arctg\left(-\frac{4\pi}{8}\right) & \text{per } f = -1 \text{ da cui possiamo per esempio dire che:} \\ \text{qualunque valore} & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{ Fase}\{U(f)\} = \begin{cases} -\arctg\left(\frac{\pi}{2}\right) & \text{per } f > 0 \\ -\arctg\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \text{per } f < 0 \end{cases}$$

- 4) l'energia e la potenza del segnale di uscita

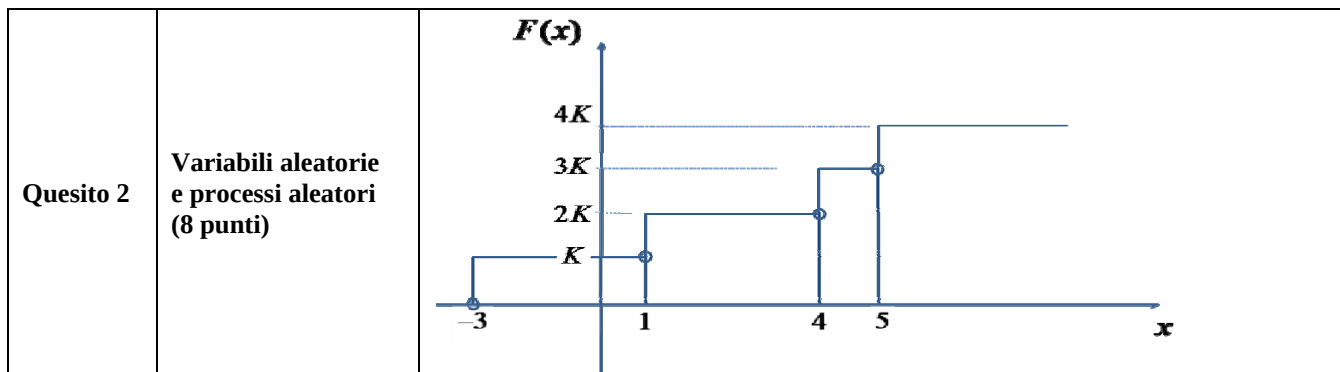
$$E_u = +\infty \text{ dato che il segnale è periodico}$$

$$P_u = \frac{2}{64 + 16\pi^2} \text{ dato che il segnale è periodico}$$

- 5) la media del segnale di uscita: $\langle u(t) \rangle = 0$ perchè lo spettro del segnale non ha componenti discrete a frequenza nulla.

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra



Data la funzione $F(x)$ rappresentata in figura. Calcolare:

- 1) il parametro K affinché essa risulti una funzione di probabilità cumulativa
- Detta ξ la variabile aleatoria rappresentata da $F(x)$, calcolare:
- 2) la funzione densità di probabilità di ξ
 - 3) la probabilità che ξ sia minore di 0
 - 4) la probabilità che ξ sia maggiore di 4
 - 5) la probabilità che ξ sia compreso tra 0 e 10
 - 6) il valore medio di ξ
 - 7) il valore quadratico medio di ξ
 - 8) la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $\eta = \xi + 2$

SOLUZIONE

- 1) il parametro K affinché essa risulti una funzione di probabilità cumulativa è: $K = \frac{1}{4}$ dato che la cdf deve tendere a 1.

Detta ξ la variabile aleatoria rappresentata da $F(x)$, calcolare:

- 2) la funzione densità di probabilità di ξ è:

$$f_{\xi}(x) = K\delta(x+3) + K\delta(x-1) + K\delta(x-4) + K\delta(x-5)$$

- 3) la probabilità che ξ sia minore di 0 è: $p = K = 0.25$

- 4) la probabilità che ξ sia maggiore di 4 è: $p = 1 - F(4) = 1 - 3K$

- 5) la probabilità che ξ sia compreso tra 0 e 10 è: $p = 1 - K$

- 6) il valore medio di ξ è: $E\{\xi\} = -3K + 1K + 4K + 5K = 7K$

- 7) il valore quadratico medio di ξ è: $E\{\xi^2\} = 9K + 1K + 16K + 25K = 51K$

- 8) la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $\eta = \xi + 2$ è:

$$f_{\eta}(y) = K\delta(y+1) + K\delta(y-3) + K\delta(y-6) + K\delta(y-7)$$

Quesito 3 Trasmissione in banda base e banda passante (10 punti)

Si vuole trasmettere il segnale $x(t) = \cos(10^4 t) + 2\sin(10^3 t)$ sia in formato analogico che digitale su un canale con banda di trasmissione compresa tra $f_A = 100$ MHz e $f_B = 106$ MHz.

Per quanto riguarda la **trasmissione digitale**, il segnale in banda base viene dapprima trasformato in binario con una conversione PCM fatta in modo da avere un rapporto segnale/rumore medio pari a 49 dB, tenendo conto che il canale introduce perdita per bit con probabilità di 10^{-6} . I bit vengono poi codificati con un codificatore di linea NRZ unipolare con formattazione a coseno rialzato con roll-off pari a 0.7. La trasmissione avviene mediante modulazione FSK con distanza tra la frequenza di mark e la frequenza di space pari a 10 kHz.

Per quanto riguarda invece la **trasmissione analogica**, vengono utilizzate una modulazione FM con $\beta = 5$ e una modulazione AM.

Sulla banda disponibile tra f_A e f_B , vengono posizionate prima tutte le trasmissioni digitali, poi quelle FM e poi quelle AM. Vengono utilizzate delle portanti tutte di ampiezza pari a 5V. Calcolare:

- 1) la frequenza di campionamento utilizzata per la conversione PCM, supponendo di voler imporre una banda di guardia pari al 10% della banda del segnale in banda base

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 2) il numero di bit per parola di codice del convertitore PCM
- 3) la banda del segnale binario in banda base
- 4) il numero di trasmissioni digitali che possono essere effettuate in parallelo se si suppone di utilizzare la prima metà della banda di canale a disposizione
- 5) le frequenze di mark e di space del primo segnale modulato FSK, supponendo di posizionarlo sul canale a partire dalla frequenza f_A
- 6) l'intervallo di frequenze occupate dalle trasmissioni FM, supponendo di posizionare il primo canale FM a partire dalla frequenza media tra f_A e f_B , e di utilizzare tale tipo di modulazione per 40 canali intervallati da una banda pari a 10 kHz
- 7) la potenza totale utilizzata per trasmettere tutti i canali FM
- 8) il numero massimo di canali AM che possono essere trasmessi sulla banda rimanente, sulle frequenze successive a quelle utilizzate per i canali FM, tenendo conto che non si vuole utilizzare una potenza complessiva per i canali AM superiore a quella utilizzata per i canali FM.

SOLUZIONE

- 1) la frequenza di campionamento utilizzata per la conversione PCM, supponendo di voler imporre una banda di guardia pari al 10% della banda del segnale in banda base

$f_s = 2B + B_G$ dove:

- $B = \max\left\{\frac{10^4}{2\pi}, \frac{10^3}{2\pi}\right\} = 1.5915 \cdot 10^3$
- $B_G = 0.1 \cdot B = 1.5915 \cdot 10^2$

Quindi: $f_s = 2B + B_G = 3.3423 \cdot 10^3$

- 2) il numero di bit per parola di codice del convertitore PCM

Dall'equazione $SNR_{medio} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}$, si ottiene: $M = \sqrt{\frac{SNR_{medio}(1 - 4P_e)}{1 - 4SNR_{medio}P_e}}$.

Tenendo conto che $SNR_{medio} = 10^{(SNR_{medio, dB}/10)} = 7.9433 \cdot 10^4$, si ha:

$$M = \sqrt{\frac{SNR_{medio}(1 - 4P_e)}{1 - 4SNR_{medio}P_e}} = 341.2097. \text{ Ovviamente il vero valore di } M \text{ sarà la minima potenza del 2 successiva al}$$

valore trovato. Quindi: $n = \lceil \log_2 M \rceil = 9 \rightarrow M = 2^9 = 512$

- 3) la banda del segnale binario in banda base

Tenendo conto che la trasmissione binaria in banda base avviene con un NRZ unipolare con formattazione

dell'impulso a coseno rialzato, la banda è: $B_z = \frac{1+r}{2} R = \frac{1+r}{2} n f_s = \frac{1.7}{2} 93.3423 \cdot 10^3 = 2.5568 \cdot 10^4$

- 4) il numero di trasmissioni digitali che possono essere effettuate in parallelo se si suppone di utilizzare la prima metà della banda di canale a disposizione

La banda di una trasmissione FSK è: $B_{FSK} = 2(\Delta F + B_z)$. Dato che:

- $\Delta F = \frac{f_1 - f_2}{2} = \frac{10k}{2} = 5000 \rightarrow B_{FSK} = 2(\Delta F + B_z) = 6.1136 \cdot 10^4$

Dunque il numero di trasmissioni digitali sarà: $N_{FSK} = \left\lfloor \frac{f_{Media} - f_A}{B_{FSK}} \right\rfloor$, dove:

- $f_A = 100 \text{ MHz}$ e $f_B = 106 \text{ MHz}$
- $f_{Media} = \frac{f_A + f_B}{2} = 103 \text{ MHz}$

E quindi: $N_{FSK} = \left\lfloor \frac{f_{Media} - f_A}{B_{FSK}} \right\rfloor = 49$

- 5) le frequenze di mark e di space del primo segnale modulato FSK, supponendo di posizionarlo sul canale a partire dalla frequenza f_A

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Le due frequenze di mark e di space si possono calcolare partendo dal valore della portante, $f_A + \frac{B_{FSK}}{2}$, e

sommando ΔF (per trovare f_1), e sottraendo ΔF (per trovare f_2):

$$\boxed{f_1 = f_A + \frac{B_{FSK}}{2} + \Delta F = 1.0004 \cdot 10^8} \quad \text{e} \quad \boxed{f_2 = f_A + \frac{B_{FSK}}{2} - \Delta F = 1.0003 \cdot 10^8}$$

- 6) l'intervallo di frequenze occupate dalle trasmissioni FM, supponendo di posizionare il primo canale FM a partire dalla frequenza media tra f_A e f_B , e di utilizzare tale tipo di modulazione per 40 canali intervallati da una banda pari a 10 kHz

La banda di un segnale FM è: $B_{FM} = 2(\beta + 1)B = 1.9099 \cdot 10^4$

La banda occupata da tutti i segnali FM sarà allora:

$$B_{FM,TOT} = N_{FM} \cdot B_{FM} + (N_{FM} - 1) \cdot B_{Guardia,FM} = 40 \cdot 1.9099 \cdot 10^4 + (39) \cdot 10k = 1.1539 \cdot 10^6$$

Dunque l'intervallo cercato sarà: $[1.03 \cdot 10^8, 1.0415 \cdot 10^8]$

- 7) la potenza totale utilizzata per trasmettere tutti i canali FM

La potenza di un canale FM è: $P_{FM} = \frac{A_c^2}{2} = 12.5$

Quindi la potenza totale è: $P_{FM,TOT} = N_{FM} P_{FM} = 500$

- 8) il numero massimo di canali AM che possono essere trasmessi sulla banda rimanente, sulle frequenze successive a quelle utilizzate per i canali FM, tenendo conto che non si vuole utilizzare una potenza complessiva per i canali AM superiore a quella utilizzata per i canali FM.

Tenendo conto della banda residua, potremmo trasmettere:

$$N_{AM,1} = \left\lfloor \frac{f_B - (f_{Media} + B_{FM,TOT})}{B_{AM}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f_B - (f_{Media} + B_{FM,TOT})}{2B} \right\rfloor = 579$$

Tenendo conto invece che non dobbiamo superare la potenza utilizzata per le trasmissioni FM, e sapendo che la potenza di una trasmissione AM è:

$P_{AM} = \frac{A_c^2}{2} (1 + P_m)$, dove $P_m = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ è la potenza del segnale modulante $x(t) = \cos(10^4 t) + 2 \sin(10^3 t)$, abbiamo:

$$P_{AM} = 43.75, \text{ e dunque: } N_{AM,2} = \left\lfloor \frac{P_{FM,TOT}}{P_{AM}} \right\rfloor = 11$$

Infine: $\boxed{N_{AM,1} = \min\{N_{AM,1}, N_{AM,2}\} = 11}$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (8 punti)		
1)		2
2)		1
3)		2
4)		2
5)		1

QUESITO 2 (10 punti)		
1)		1
2)		2
3)		1
4)		1
5)		1
6)		1
7)		1
8)		2

QUESITO 3 (12 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		2
5)		2
6)		2
7)		1
8)		2

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
MIN(Q1)=5 MIN(Q2)=3 MIN(Q3)=4

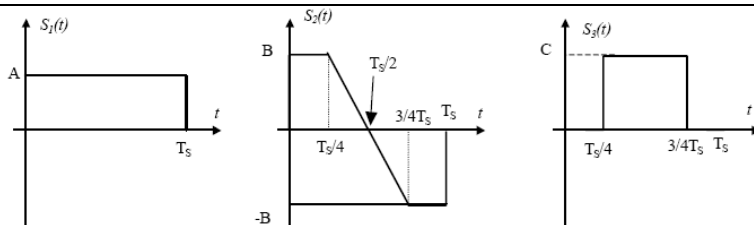
FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

COMPITO 26 - 22 settembre 2008

Quesito 1

Teoria dei segnali
(15 punti)



Si considerino le forme d'onda rappresentate in figura. Calcolare:

- 1) l'espressione analitica dei tre segnali nel dominio del tempo;
- 2) i valori dei parametri B e C in funzione di A in modo che esse siano isoenergetiche;
- 3) il grafico del segnale $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$, utilizzando i valori di B e C calcolati al punto precedente;

Siano $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$ le tre forme d'onda ottenute dalle precedenti replicandole con periodo di replica $T = 4 \cdot T_s$.

Calcolare, lasciando indicati i parametri A , B e C :

- 4) il valore medio dei tre segnali $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$;
- 5) la potenza dei tre segnali $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$;
- 6) lo spettro bilatero del segnale $y_1(t)$
- 7) lo spettro bilatero del segnale $y_3(t)$

SOLUZIONE

- 1) l'espressione analitica dei tre segnali nel dominio del tempo:

$$s_1(t) = A \Pi\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

$$s_2(t) = B \Pi\left(\frac{t - T_s/8}{T_s/4}\right) - B \Pi\left(\frac{t - 7T_s/8}{T_s/4}\right) + \left[\left(-\frac{4B}{T_s} x + 2B \right) \Pi\left(\frac{t - T_s/2}{T_s/2}\right) \right]$$

dato che la retta per i due punti $\left(\frac{T_s}{4}, B\right)$ e $\left(\frac{3}{4}T_s, -B\right)$ è $y = -\frac{4B}{T_s}x + 2B$

$$s_3(t) = C \Pi\left(\frac{t - T_s/2}{T_s/2}\right)$$

- 2) l'energia del segnale $s_1(t)$ è: $E_{s_1} = A^2 T_s$

$$\text{l'energia del segnale } s_2(t) \text{ è: } E_{s_2} = 2B^2 T_s/4 + \int_{T_s/4}^{3T_s/4} \left(-\frac{4B}{T_s}x + 2B \right)^2 dt = \frac{1}{2} B^2 T_s + \frac{1}{6} B^2 T_s = \frac{2}{3} B^2 T_s$$

$$\rightarrow E_{s_2} = \frac{2}{3} B^2 T_s$$

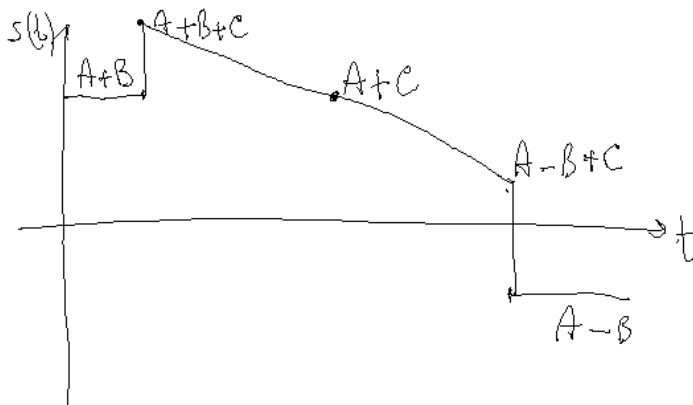
$$\text{l'energia del segnale } s_3(t) \text{ è: } E_{s_3} = \frac{1}{2} C^2 T_s$$

$$\text{Imponendo che abbiano la stessa energia, avremo: } B = \sqrt{\frac{3}{2}} A \text{ e } C = \sqrt{2} A$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

3) Il grafico è:



4) Il valor medio dei tre segnali è:

$$\langle y_1(t) \rangle = \frac{AT_s}{4T_s} = \frac{A}{4}$$

$$\langle y_2(t) \rangle = \frac{\text{Area}}{\text{periodo}} = \frac{0}{4T_s} = 0$$

$$\langle y_3(t) \rangle = \frac{\text{Area}}{\text{periodo}} = \frac{C \frac{T_s}{2}}{4T_s} = \frac{1}{8} C$$

5) La potenza dei tre segnali è:

$$P_{s_1} = \frac{A^2 T_s}{4T_s} = \frac{A^2}{4}$$

$$P_{s_2} = \frac{\text{Energia}}{\text{periodo}} = \frac{\frac{2}{3} B^2 T_s}{4T_s} = \frac{1}{6} B^2 = \frac{A^2}{4}$$

$$P_{s_3} = \frac{\text{Energia}}{\text{periodo}} = \frac{\frac{1}{2} C^2 T_s}{4T_s} = \frac{1}{8} C^2 = \frac{A^2}{4}$$

6) lo spettro bilatero del segnale $y_1(t)$ è:

$$Y_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)} \delta(f - nF) \quad \text{dove:} \quad c_n^{(1)} = F S_1(nF) = \frac{1}{4} A \text{sinc}\left(\frac{n}{4}\right) e^{-j\pi n/4}$$

7) lo spettro bilatero del segnale $y_3(t)$ è:

$$Y_3(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(3)} \delta(f - nF) \quad \text{dove:} \quad c_n^{(3)} = F S_3(nF) = \frac{1}{8} C \text{sinc}\left(\frac{n}{8}\right) e^{-j\pi n/4}$$

Quesito 2	Variabili aleatorie e processi aleatori (8 punti)	
------------------	--	--

Dato il processo aleatorio parametrico $X(t, \Omega) = \Omega + \Omega \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{8}\right)$, con Ω variabile aleatoria determinata dal risultato della tombola (numeri da 1 a 90 equiprobabili), calcolare:

- l'espressione analitica e il grafico di due realizzazioni scelte a piacere tra quelle caratterizzanti il processo
- l'espressione analitica e il grafico della funzione densità di probabilità della variabile aleatoria ottenuta all'istante $t_1 = 8$
- l'espressione analitica e il grafico della funzione densità di probabilità della variabile aleatoria ottenuta all'istante $t_2 = 0$
- l'espressione analitica e il grafico della funzione densità di probabilità della variabile aleatoria ottenuta all'istante $t_3 = 4$
- il valore medio statistico al variare del tempo
- la funzione di autocorrelazione statistica
- Discutere sulla stazionarietà del processo

NOTA: per i punti 5) e 6), fermarsi alla sostituzione delle equazioni; non è necessario sviluppare i passaggi con formule trigonometriche.

SOLUZIONE

- l'espressione analitica e il grafico di due realizzazioni scelte a piacere tra quelle caratterizzanti il processo

$$X(t, 1) = 1 + 1 \text{sinc}\left(\frac{t}{8}\right) \quad \text{e} \quad X(t, 2) = 2 + 2 \text{sinc}\left(\frac{t}{8}\right)$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 2) l'espressione analitica e il grafico della funzione densità di probabilità della variabile aleatoria ottenuta all'istante $t_1 = 8$

$$f_x(x, t=8) = \sum_{w=1}^{90} \frac{1}{90} \delta[x-w]$$

- 3) l'espressione analitica e il grafico della funzione densità di probabilità della variabile aleatoria ottenuta all'istante $t_2 = 0$

$$f_x(x, t=0) = \sum_{w=1}^{90} \frac{1}{90} \delta[x-2w]$$

- 4) l'espressione analitica e il grafico della funzione densità di probabilità della variabile aleatoria ottenuta all'istante $t_3 = 4$

$$f_x(x, t=4) = \sum_{w=1}^{90} \frac{1}{90} \delta\left[x - \left(w + w \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] = \sum_{w=1}^{90} \frac{1}{90} \delta[x - 1.63w]$$

- 5) il valore medio statistico al variare del tempo

$$E\{X(t)\} = \sum_{w=1}^{90} \left(w + w \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{8}\right) \right) \frac{1}{90} = \left(1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{8}\right) \right) \cdot \frac{1}{90} \sum_{w=1}^{90} w = \left(1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{8}\right) \right) \frac{1}{90} \frac{90 \cdot 91}{2} = \frac{1.63 \cdot 91}{2} = 74.165$$

- 6) la funzione di autocorrelazione statistica

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \frac{1}{90} \sum_{w=1}^{90} \left(w + w \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t_1}{8}\right) \right) \left(w + w \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t_2}{8}\right) \right)$$

I passaggi sono simili a quelli del punto precedente.

- 7) Discutere sulla stazionarietà del processo
Il processo non è stazionario perché già il valor medio dipende dal tempo.

Quesito 3 | Trasmissione in banda base e banda passante (10 punti)

Si consideri un sistema di trasmissione digitale in banda base per segnali analogici in banda base che presentano un'occupazione spettrale sull'intervallo da 2 kHz a 7.5 KHz. Il sistema è costituito da un convertitore analogico-digitale PCM e da un trasmettitore digitale che usa una codifica di linea NRZ unipolare a impulsi rettangolari. Il **convertitore PCM** utilizza un quantizzatore uniforme la cui dinamica corrisponde a quella dei segnali in ingresso, ed è progettato per garantire almeno 47 dB di rapporto segnale rumore (SNR) medio complessivo (quantizzazione + errore) sopra soglia (sugg.: progettare il sistema non considerando la probabilità di perdita, ma aggiungendo un margine di rumore di 3dB).

Il trasmettitore digitale formatta i bit con impulsi rettangolari di ampiezza $A = 1.2 \text{ V}$.

Calcolare:

- la minima frequenza di campionamento necessaria per mantenere una banda di guardia di 1 kHz
- il numero minimo di bit n_{bit} di quantizzazione necessari
- la velocità di trasmissione in bit/s del trasmettitore digitale binario a valle del convertitore analogico/digitale
- la probabilità di errore alla soglia, $P_{\text{err}}^{(\text{Soglia})}$, cioè la massima probabilità di errore di canale consentita affinché sia rispettato il vincolo di SNR a destinazione

Supponendo invece che per un certo intervallo di tempo il canale, a causa della presenza di rumore additivo gaussiano binario presenta attenuazione unitaria e una probabilità di errore $P_{\text{err}} = 14 \cdot P_{\text{err}}^{(\text{Soglia})}$, calcolare:

- lo spettro di potenza del rumore di canale
- l'SNR medio in dB risultante a destinazione

SOLUZIONE

- la minima frequenza di campionamento necessaria per mantenere una banda di guardia di 1 kHz
 $f_s = 2B + B_G = 16 \text{ kHz}$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

- 2) il numero minimo di bit n_{bit} di quantizzazione necessari

Per soddisfare la richiesta di 47 dB di SNR a destinazione, supponiamo che il canale non introduca più di 3 dB di rumore, e dunque progettiamo il sistema di trasmissione per garantire 50 dB. Si ha dunque:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 50 \rightarrow \text{per la regola dei 6 dB, abbiamo: } n = \left\lceil \left(\frac{S}{N}\right)_{dB} / 6.02 \right\rceil = 9$$

- 3) la velocità di trasmissione in bit/s del trasmettitore digitale binario a valle del convertitore analogico/digitale è:

$$R = n \cdot f_s = 9 \cdot 16k = 144 \text{ kbit/s}$$

- 4) la probabilità di errore alla soglia, $P_{err}^{(Soglia)}$, cioè la massima probabilità di errore di canale consentita affinché sia rispettato il vincolo di SNR a destinazione è:

$$P_e^* = \frac{1}{4(M^2 - 1)} = \frac{1}{4((2^9)^2 - 1)} = 9.53 \cdot 10^{-7}$$

- 5) lo spettro di potenza del rumore di canale

Per trovare lo spettro di potenza del rumore, ricordiamo che $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Imponendo una probabilità di errore pari a $P_{err} = 14 \cdot P_{err}^{(Soglia)} = 14 \cdot 9.53 \cdot 10^{-7} = 1.3342 \cdot 10^{-5}$

abbiamo che: $\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} = Q^{-1}(P_{err})$, dove $Q^{-1}(\cdot)$ indica l'inversa della funzione Q .

Dal formulario vediamo che: $Q^{-1}(P_{err}) = Q^{-1}(1.3342 \cdot 10^{-5}) = 4.2$

$$\rightarrow \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{E_b}{Q^{-1}(P_e)} \text{ dove } E_b \text{ è l'energia media per bit, pari a: } E_b = \frac{1}{2} A^2 T_b = \frac{1}{2} \frac{A^2}{R} = 5 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{Quindi: } S_N(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{E_b}{Q^{-1}(P_e)} = 5.9524 \cdot 10^{-7}$$

- 6) l'SNR medio in dB risultante a destinazione

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}, \text{ dove: } M = 2^9 \text{ e } P_e = 14 \cdot P_{err}^{(Soglia)} = 14 \cdot 9.53 \cdot 10^{-7} = 1.3342 \cdot 10^{-5}$$

Si ha dunque:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} = 1.7488 \cdot 10^4 = 42.43 \text{ dB}$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (12 punti)		
1)		2
2)		2
3)	Se il quesito è stato svolto, scrivere “-Q1.3- vedi foglio”	2
4)		2
5)		2
6)		1
7)		1

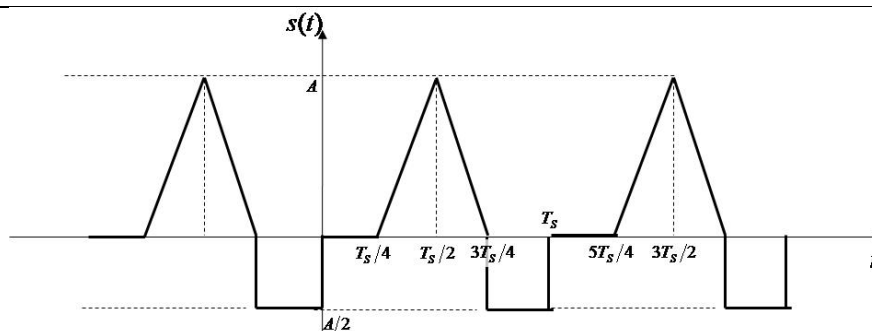
QUESITO 2 (10 punti)		
1)	Se il quesito è stato svolto, scrivere “-Q2.1- vedi foglio”	1
2)	Se il quesito è stato svolto, scrivere “-Q2.2- vedi foglio”	2
3)	Se il quesito è stato svolto, scrivere “-Q2.3- vedi foglio”	2
4)	Se il quesito è stato svolto, scrivere “-Q2.4- vedi foglio”	2
5)		1
6)		1
7)		1

QUESITO 3 (8 punti)		
1)		1
2)		1
3)		1
4)		2
5)		2
6)		1

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 14 punti complessivamente e:
 $\text{MIN}(Q1)=5$ $\text{MIN}(Q2)=3$ $\text{MIN}(Q3)=4$

COMPITO 27 - 28 novembre 2008

Quesito 1 Segnali e spettri



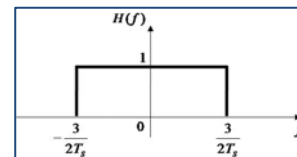
Si consideri il segnale $s(t)$ mostrato in figura, e avente periodo T_s .

- 1) Si calcoli l'espressione temporale del segnale in funzione del parametro A .
- 2) Si ricavi l'espressione dello spettro del segnale e, si disegni qualitativamente lo spettro delle ampiezze.
- 3) Si determini il valore del parametro A tale che la componente dello spettro a frequenza nulla abbia ampiezza 2.

Considerando il valore di A calcolato al punto precedente,

- 4) Si scriva l'equazione del segnale $s_1(t)$ ottenuto dal segnale $s(t)$ sottraendovi $s_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 16\Lambda\left(\frac{t - T_s/2 - kT_s}{T_s/4}\right)$
- 5) Si calcolino numericamente e si disegnino la componente continua, l'armonica fondamentale e la seconda armonica (sia per frequenze positive che negative) dello spettro delle ampiezze del segnale $s_1(t)$ per $T_s = 8/7$.

Supponendo di far passare il segnale $s_1(t)$ attraverso un filtro $H(f)$ del tipo mostrato in figura



- 6) determinare la potenza del segnale dopo il filtraggio.

SOLUZIONE

1) Espressione del segnale $s(t) = A\Lambda\left(\frac{t - \frac{T_s}{2} - kT_s}{\frac{T_s}{4}}\right) - \frac{A}{2}\Pi\left(\frac{t - \frac{7T_s}{8} - kT_s}{\frac{T_s}{4}}\right)$

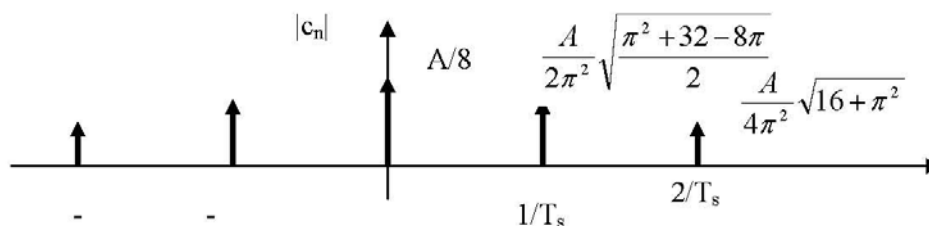
- 2) Lo spettro del segnale lo ottengo considerando il segnale troncato in un periodo e calcolando i coefficienti c_n .

Lo spettro del segnale troncato è:

$$H(f) = A \frac{T_s}{4} \text{sinc}^2\left(f \frac{T_s}{4}\right) e^{-j2\pi f \left(\frac{T_s}{2} + kT_s\right)} - \frac{A}{2} \frac{T_s}{4} \text{sinc}\left(f \frac{T_s}{4}\right) e^{-j2\pi f \left(\frac{7T_s}{8} + kT_s\right)}$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \text{ essendo } c_n = \frac{1}{T_s} H\left(\frac{n}{T_s}\right) \text{ ovvero } c_n = \frac{A}{4} (-1)^n \text{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right) - \frac{A}{8} \text{sinc}\left(\frac{n}{4}\right) e^{-j7\pi n/4}$$

Lo spettro sarà a righe del tipo mostrato in figura



- 3) Perché la componente a $f=0$ abbia ampiezza 2 dovrà essere $A=16$.

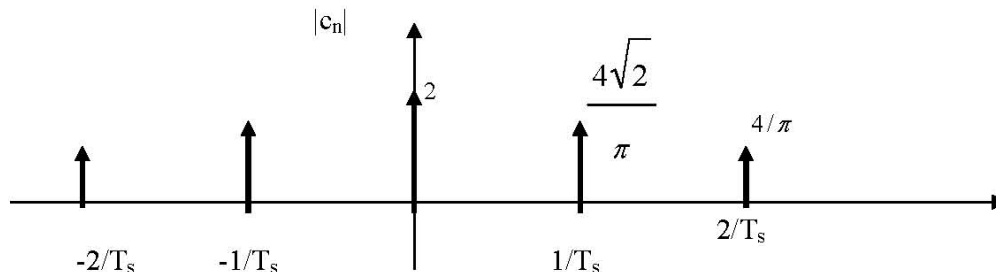
FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

4) Considerando ora il segnale $s_1(t)$, esso si ridurrà ad essere

$$s_1(t) = -8\Pi\left(\frac{t - \frac{7T_s}{8} - kT_s}{\frac{T_s}{4}}\right)$$

5) Lo spettro delle ampiezze di $s_1(t)$ per $T_s=8/7$ otteniamo



6) In base alla ampiezza di banda del filtro verranno selezionate solo le componenti a frequenza nulla e quelle a frequenze $-1/T_s$ e $+1/T_s$.

La potenza del segnale filtrato sarà quindi $P = |c_0|^2 + 2|c_1|^2 = 4 + 64/\pi^2 = 10.48$

Quesito 2 Processi aleatori

Si consideri il processo aleatorio parametrico $X(\Omega, t) = \Omega + t$, dove Ω è una variabile aleatoria con distribuzione

esponenziale bilatera $f_\Omega(w) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|w|}$, con α valore opportuno. Calcolare:

- 1) α affinché la funzione $f_\Omega(w)$ sia una funzione densità di probabilità, e disegnare un grafico qualitativo di $f_\Omega(w)$
- 2) il valor medio della variabile aleatoria Ω
- 3) la varianza della variabile aleatoria Ω
- 4) la probabilità che Ω sia maggiore di 0
- 5) il valor medio statistico del processo al variare del tempo
- 6) la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio in forma simbolica
- 7) Cosa si può dire della ergodicità del processo?

SOLUZIONE

- 1) α affinché la funzione $f_\Omega(w)$ sia una funzione densità di probabilità, e disegnare un grafico qualitativo di $f_\Omega(w)$

Imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\Omega(w) dw = 1$ troviamo $1=1$ che ci porta a dire “per qualunque valore di $\forall \alpha \neq 0$ ”. Ma ricordando che deve anche essere $f_\Omega(w) \geq 0$, otteniamo $\forall \alpha > 0$

- 2) il valor medio della variabile aleatoria Ω è $E\{\Omega\} = 0$ dato che la $f_\Omega(w)$ è simmetrica rispetto allo 0.

- 3) la varianza della variabile aleatoria Ω è $\sigma_\Omega^2 = E\{\Omega^2\} - \mu_\Omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 f_\Omega(w) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 e^{-2|w|} dw = 2 \int_0^{+\infty} w^2 e^{-2w} dw = 2/\alpha^2$

- 4) la probabilità che Ω sia maggiore di 0 è $\text{Prob}\{\Omega > 0\} = \frac{1}{2}$ dato che $E\{\Omega\} = 0$ e $f_\Omega(w)$ è simmetrica rispetto allo 0

- 5) il valor medio statistico del processo al variare del tempo

$$E\{X(t)\} = E\{\Omega + t\} = E\{\Omega\} + E\{t\} = t$$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

Quesito 3 Trasmissione in banda passante

In un sistema di comunicazione televisiva la potenza del trasmettitore è di 20 kW, l'attenuazione del canale è di 100 dB, e la densità spettrale bilatera di potenza del rumore è di $N_0/2 = 10^{-15}$ W/Hz. Il segnale in banda base ha una larghezza di banda di 4 KHz. Calcolare il rapporto segnale rumore all'ingresso del demodulatore, dopo il filtro di ricezione:

- 4) per la modulazione AM
- 5) per la modulazione AM DSB-SC
- 6) per la modulazione AM SSB

Calcolare inoltre il rapporto segnale rumore all'uscita del demodulatore, nel caso in cui il segnale originale abbia una potenza media $P_x = 0.5$, e venga modulato con indice di modulazione $m = 0.6$

- 7) per la modulazione AM
- 8) per la modulazione AM SSB

[**SUGGERIMENTO:** per il calcolo della potenza del segnale modulante, tenere conto della relazione tra segnale modulante e segnale originale, $m(t) = m \cdot x(t)$, dove $m(t)$ è il segnale modulante, m è l'indice di modulazione, e $x(t)$ è il segnale originale]

SOLUZIONE

L'attenuazione del canale è 100dB ovvero 10^{-10} in notazione lineare. Pertanto la potenza ricevuta all'ingresso del demodulatore sarà $P_R = P_T / A = 2 \cdot 10^{-6} W$

La potenza di rumore si calcola da $N = 2 \int_{f_c - B/2}^{f_c + B/2} \frac{N_0}{2} df = N_0 B$

Nel caso di modulazione

- | | | | |
|--------------|--------------|---|--------------------------------------|
| 1. AM | $B=2W=8$ kHz | e | $N=N_0 \cdot 2W=16 \cdot 10^{-12}$ W |
| 2. AM DSB-SC | $B=2W=8$ kHz | e | $N=N_0 \cdot 2W=16 \cdot 10^{-12}$ W |
| 3. AM SSB | $B=W=4$ kHz | e | $N=N_0 \cdot W=8 \cdot 10^{-12}$ W |

Pertanto il SNR_{dem-in} sarà

1. AM $SNR_{dem-in} = (20 \cdot 10^{-7}) / (16 \cdot 10^{-12}) = 1.25 \cdot 10^5$
2. AM DSB-SC $SNR_{dem-in} = (20 \cdot 10^{-7}) / (16 \cdot 10^{-12}) = 1.25 \cdot 10^5$
3. AM SSB $SNR_{dem-in} = (20 \cdot 10^{-7}) / (8 \cdot 10^{-12}) = 2.5 \cdot 10^5$

Per valutare il rapporto SNR all'uscita del demodulatore si consideri che

4. nel caso di modulazione AM essendo S_x la potenza del segnale di partenza ed m l'indice di modulazione si avrà

$$SNR_{dem-out} = SNR_{dem-in} \frac{m^2 S_x}{1 + m^2 S_x} = 1.25 \cdot 10^5 \cdot \frac{0.6^2 \cdot 0.5}{1 + 0.6^2 \cdot 0.5} = 0.19 \cdot 10^5$$

5. nel caso di modulazione AM SSB si avrà invece $SNR_{dem-out} = SNR_{dem-in} = 2.5 \cdot 10^5$

FONDAMENTI DI TELECOMUNICAZIONI

Prof. Giovanni Schembra

QUESITO 1 (10 punti)		
1)		2
2)		2
3)		1
4)		1
5)		2
6)		2

QUESITO 2 (10 punti)		
1)	(se il grafico è sul foglio, scrivere “vedi foglio”)	2
2)		1
3)		1
4)		1
5)		2
6)		2
7)		1

QUESITO 3 (10 punti)		
1)		2
2)		2
3)		2
4)		2
5)		2

Regole per superare il compito: Ottenere almeno 15 punti complessivamente e:
MIN(Q1)=4 MIN(Q2)=4 MIN(Q3)=4